Jukka Kangasaho ◦ Jukka Mäkinen ◦ Juha Oikkonen ◦
Johannes Paasonen ◦ Maija Salmela ◦ Jorma Tahvanainen

Pitkä matematiikka 6

Todennäköisyys ja tilastot

Sanoma Pro Oy
Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-2304-6 Pitkä matematiikka 6

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2397-8
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2398-5

Toimitus: Ville Sipiläinen, Riitta-Liisa Eerola
Ulkoasu: graafinen suunnittelu Veera Alanko, kansi Timo Jokivartio
Taitto: Jukka Nieminen
Piirrokset: Picman Oy, Pekka Könönen ja Tuomas Könönen:

© Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen,
Maija Salmela, Jorma Tahvanainen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot
Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Lukijalle

Pitkä matematiikka

Useimmat luonnontieteiden ja tekniikan saavutukset perustuvat matematiikan tuloksiin, niin myös yhä enemmän monet yhteiskuntatieteiden ja humanististen tieteiden oivallukset. Pelkän teoreettisen uteliaisuudenkin innoittamana löydetty matemaattinen tieto on usein osoittautunut yllättävän hyödylliseksi. Matematiikassa yhdistyy kiehtovalla tavalla kaksi piirrettä: se on luovan ajattelun ja oivaltamisen leikkiä ja samalla täsmällistä ja loogista.

Pitkä matematiikka -sarjan tavoitteena on, että opiskelija matematiikan tietojen ja taitojen lisäksi oppii ymmärtämään matematiikan erityisluonteen tiedonalana, jossa teoreettinen kohtaa käytännöllisen ja jossa luova oivaltaminen kohtaa täsmällisen loogisuuden.

Eteneminen

Luvun avaa aihepiiriin johdatteleva ongelma tai esimerkki. Uusi teoreettinen tieto kootaan ja perustellaan, ja lisäesimerkit opastavat tiedon hyväksikäyttöön ja syventämiseen. Esimerkit on laadittu niin, että opiskelijat voivat omaksua ne itsenäisesti. Siten tuntityöskentelyssä voidaan usein jo aikaisessa vaiheessa siirtyä itsenäiseen harjoitteluun, jolloin opiskelijat etenevät omassa tahdissaan kirjan esimerkkejä hyödyntäen. Näin menetellen kaikki opiskelijat harjaantuvat perustaidoissa, ja samalla nopeammin etenevillä on mahdollisuus tietojen ja taitojen syventämiseen. Kun opiskelijat ohjataan hyödyntämään kirjan esimerkkejä ja teoriaosuuksia, tarve vihkomuistiinpanojen tekemiseen vähenee ja opiskelijat voivat paremmin keskittyä opetukseen.

Harjoittelu

Lukujen harjoitukset ovat kahtena sarjana.

Sarja I sisältää perustehtäviä, jotka harjoittavat uusia menetelmiä, tukevat teoreettisen tiedon ymmärtämistä ja juurruttamista sekä ohjaavat opitun soveltamiseen. Enimmäkseen tehtävät heijastelevat luvun esimerkkien tilanteita. Sarjaa I voidaan käyttää esimerkiksi oppitunnin aikana tapahtuvaan harjoitteluun.

Sarja II sisältää perustehtävien lisäksi vaativampia tehtäviä, joissa usein on myös matematiikan harrastamiseen innostavaa syventävää tietoa. Sarjasta II voidaan valikoida oppitunnin mittaan havaittujen tarpeiden mukaiset helpommat ja vaativammat kotitehtävät.

Kirjan esimerkit ja teoriaosuudet ovat apuna myös kotitehtävien parissa työskenneltäessä. Kaikkia tarpeellisina pidettyjä tietoja tai sovellustilanteita ei siis tarvitse käsitellä oppitunnin aikana, vaan niihin voidaan perehtyä ratkaistaessa kotitehtäviä kirjan esimerkkien avulla.

Kertaaminen

Opiskelijat voivat kerrata koko kurssin kertausluvun avulla. Luvussa käydään ensin läpi kurssin koko sisältö esimerkeillä havainnollistettuna. Sen jälkeen on samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä riittävän osaamisen takaavia perustehtäviä. Kertausluvun päättävissä tehtäväsarjoissa on vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta. Kertausluvun tehtävien vastauksissa on, kuten monien tehtävien vastauksissa kautta koko kurssin, ratkaisemista tukevia ohjeita.

Opettajan materiaali

Kirjan opettajanmateriaali on Sanoma Pro Oppimisympäristössä. Materiaalissa muun muassa pohditaan opetusmenetelmiä ja selvennetään kirjan ja sen eri lukujen tavoitteita ja niiden ilmenemistä esimerkeissä ja tehtävissä. Lisäksi materiaali tarjoaa työskentelyn avuksi kalvopohjia ja testejä. Opettajan materiaali sisältää myös kaikkien tehtävien yksityiskohtaiset ratkaisut.

Todennäköisyys ja tilastot

Todennäköisyyslaskenta on matematiikan alue, jonka tavoitteena on saada tietoa sattumasta. Kurssilla opitaan laskemaan todennäköisyyksiä ja käyttämään todennäköisyyksiä apuna ennustamisessa ja päätöksenteossa. Samalla opitaan niin sanottuja kombinatorisia menetelmiä, joilla voidaan laskea erilaisia lukumääriä. Kurssilla perehdytään myös tilastotieteen perusteisiin ja havaitaan todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen läheinen yhteys.

Toivotamme mielenkiintoisia ja tuloksellisia työskentelyhetkiä.

Helsingissä 1.11.2005

Tekijät

Ajankäyttöehdotus

Tässä ajankäyttöehdotuksessa kurssin opiskeluun käytetään 28 oppituntia.

Luku	Tuntimäärä
Todennäköisyys	2
Todennäköisyyksiä alkeistapauksia laskemalla	1
Geometrinen todennäköisyys	2
Satunnaismuuttujan odotusarvo	2
Tuloperiaate	2
Järjestysten lukumäärä	1
Osajoukkojen lukumäärä	2
Todennäköisyyksiä kombinatoriikan avulla	2
Kertolaskusääntö	3
Yhteenlaskusääntö	2
Toistokoe	2
Diskreetti tilastollinen jakauma	2
Jatkuva tilastollinen jakauma	2
Normaalijakauma	3

Sisällys

Todennäköisyys 7
Todennäköisyyksiä alkeistapauksia laskemalla 19
Geometrinen todennäköisyys 25
Satunnaismuuttujan odotusarvo 30
Tuloperiaate 38
Järjestysten lukumäärä 48
Osajoukkojen lukumäärä 56
Pascalin kolmio 65
Todennäköisyyksiä kombinatoriikan avulla 70
Kertolaskusääntö 79
Yhteenlaskusääntö 92
Toistokoe 103
Diskreetti tilastollinen jakauma 112
Jatkuva tilastollinen jakauma 129
Normaalijakauma 141

Kertaus 159
Kertaustehtäviä 175
Tehtäväsarjoja 180
Tehtävien vastaukset 183
Hakemisto 214

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 (ote)

Matematiikan pitkä oppimäärä

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.

Opetuksen tavoitteet

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa
- rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin
- ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä
- oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena
- kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan
- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä
- harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

6. Todennäköisyys ja tilastot (MAA6)

Tavoitteet

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- oppii havainnollistamaan diskreettejä ja jatkuvia tilastollisia jakaumia sekä määrittämään ja tulkitsemaan jakaumien tunnuslukuja
- perehtyy kombinatorisiin menetelmiin
- perehtyy todennäköisyyden käsitteeseen ja todennäköisyyksien laskusääntöihin
- ymmärtää diskreetin todennäköisyysjakauman käsitteen ja oppii määrittämään jakauman odotusarvon ja soveltamaan sitä
- perehtyy jatkuvan todennäköisyysjakauman käsitteeseen ja oppii soveltamaan normaalijakaumaa.

Keskeiset sisällöt

- diskreetti ja jatkuva tilastollinen jakauma
- jakauman tunnusluvut
- klassinen ja tilastollinen todennäköisyys
- kombinatoriikka
- todennäköisyyksien laskusäännöt
- diskreetti ja jatkuva todennäköisyysjakauma
- diskreetin jakauman odotusarvo
- normaalijakauma

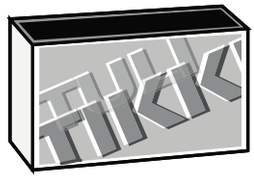
Todennäköisyys

Ongelma 1

Arpanoppaa heitetään kerran. Millä todennäköisyydellä saatu silmäluku on a) 3 b) vähintään 3?

Ongelma 2

Tulitikkulaatikko heitetään ylöspäin. Millä todennäköisyydellä laatikko lattialle pudotessaan jää jommallekummalle raapaisupinnalleen?



Satunnaisilmiö

Ilmiötä, jonka tuloksen määrää sattuma, kutsutaan *satunnaisilmiöksi* tai *satunnaiskokeeksi*.

Satunnaisilmiönä voidaan pitää esimerkiksi nopanheittoa (tuloksena silmäluku).

Satunnaisilmiön mahdollisia tuloksia kutsutaan *alkeistapauksiksi.* Alkeistapausten joukkoa kutsutaan *perusjoukoksi*.

Heitetään yhtä noppaa. Alkeistapaukset ovat silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Perusjoukko on joukko {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Tapahtuma

Perusjoukon osajoukkoa kutsutaan *tapahtumaksi*. Tapahtumaan kuuluvia alkeistapauksia kutsutaan tapahtumalle *suotuisiksi alkeistapauksiksi*. Tapahtumia voidaan merkitä aakkosten isoilla kirjaimilla.

Heitetään noppaa. Tapahtuma A: ”silmäluku suurempi kuin 2” on perusjoukon {1, 2, 3, 4, 5, 6} osajoukko {3, 4, 5, 6}. Tapahtumalle A suotuiset alkeistapaukset ovat silmäluvut 3, 4, 5 ja 6.

Tapahtuman klassinen todennäköisyys

Oletetaan, että perusjoukon kaikki alkeistapaukset ovat *yhtä mahdollisia* eli *symmetrisiä*.

Tällöin tapahtuman A *todennäköisyys* on

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{tapahtumalle suotuisten alkeistapausten määrä}}{\text{perusjoukon alkeistapausten lukumäärä}}$$

eli

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n_A}{n},$$

missä n_A on tapahtumalle A suotuisten alkeistapausten lukumäärä ja n kaikkien mahdollisten alkeistapausten lukumäärä.*

Näin määriteltyä todennäköisyyttä kutsutaan tapahtuman *klassiseksi todennäköisyydeksi*.

Klassinen todennäköisyys voidaan siis laskea tapahtumalle, joka muodostuu yhtä mahdollisista alkeistapauksista.

> Nopanheitossa jokaista yksittäistä silmälukua voidaan pitää yhtä mahdollisena. Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on kuusi ja tapahtumalle A: ”silmäluku suurempi kuin 2” suotuisten alkeistapausten lukumäärä on neljä, joten
>
> $$\mathrm{P}(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67.$$**

Mahdoton ja varma tapahtuma

Tapahtuma, jolla ei ole yhtään suotuisaa alkeistapausta, on *mahdoton*. Mahdottoman tapahtuman todennäköisyys on 0. Jos kaikki perusjoukon alkeistapaukset ovat suotuisia, tapahtuma on *varma*. Varman tapahtuman todennäköisyys on 1. Kaikille tapahtumille A on

$$0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1.$$

---

* Todennäköisyys on ranskaksi probabilité ja englanniksi probability. Todennäköisyyksiä merkittäessä käytetty kirjain P tulee näiden sanojen alkukirjaimista.

** Klassinen todennäköisyys ilmaistaan yleensä supistettuna murtolukuna, jolle voidaan myös laskea suuruusluokkien vertailua helpottava likiarvo. Joskus todennäköisyydet ilmaistaan myös prosentteina: $\frac{2}{3} \approx 0{,}67 = 67\ \%$.

ESIMERKKI 1

Neljän hengen seurueesta, jonka muodostavat Antti, Birgitta, Carola ja Daniel, kaksi mahtuu taksiin. Taksiin pääsijät valitaan arvalla.
a) Laske tapahtuman ”Antti ja Birgitta pääsevät molemmat taksiin” todennäköisyys.
b) Millä todennäköisyydellä Antti pääsee taksiin?

Ratkaisu

Alkeistapauksiksi voidaan valita mahdolliset taksiin pääsevät parit eli parit, jotka voidaan muodostaa neljän hengen joukosta. Merkitään jokaista seurueen jäsentä nimen alkukirjaimella ja luetellaan kaikki mahdolliset alkeistapaukset. Luettelon laatimista helpottaa aakkosjärjestyksen noudattaminen. Perusjoukko on

$\{AB,\ AC,\ AD,\ BC,\ BD,\ CD\}$. Kaikkien mahdollisten alkeistapausten joukko.

Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on 6. Koska taksiin pääsijät valitaan arpomalla, jokainen alkeistapaus on yhtä mahdollinen.

a) Tapahtumalla ”Antti ja Birgitta pääsevät molemmat taksiin” on yksi ainoa suotuinen alkeistapaus AB. Tapahtuman todennäköisyys on suotuisten alkeistapausten lukumäärän suhde kaikkien alkeistapausten lukumäärään.

$$P(\text{Antti ja Birgitta molemmat pääsevät taksiin}) = \frac{1}{6}$$

b) Tapahtumalle ”Antti pääsee taksiin” suotuiset alkeistapaukset ovat AB, AC ja AD.

$$\mathrm{P}(\text{Antti pääsee taksiin}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Suotuisten alkeistapausten lukumäärän suhde kaikkien alkeistapausten lukumäärään.

Vastaus a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ *

Vastatapahtuma

Jokaisella tapahtumalla A on *vastatapahtuma* eli *komplementtitapahtuma* ”A ei tapahdu”. Tapahtuman A vastatapahtuma merkitään $\overline{A}$. Vastatapahtumalle $\overline{A}$ ovat suotuisia kaikki ne alkeistapaukset, jotka eivät ole suotuisia tapahtumalle A.

Heitetään noppaa. Tapahtuman A: ”silmäluku suurempi kuin 2” vastatapahtuma $\overline{A}$ on ”silmäluku ei ole suurempi kuin 2” eli ”silmäluku on korkeintaan 2”. Tapahtumalle A suotuiset alkeistapaukset ovat silmäluvut 3, 4, 5 ja 6. Vastatapahtumalle $\overline{A}$ suotuiset alkeistapaukset ovat silmäluvut 1 ja 2.

Jos kaikkien alkeistapausten lukumäärä on n, ja tapahtumalle A suotuisten alkeistapausten lukumäärä on n_A, niin vastatapahtumalle $\overline{A}$ suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $n - n_A$. Vastatapahtuman todennäköisyys on

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{n - n_A}{n} = \frac{n}{n} - \frac{n_A}{n} = 1 - \frac{n_A}{n} = 1 - \mathrm{P}(A).$$

---

* Voidaan myös ajatella, että taksiin pääsijät arvotaan peräkkäin, ja valita alkeistapauksiksi arvotut pääsijät arvontajärjestyksessä: Perusjoukko olisi tällöin

{AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC}.

Perusjoukossa olisi 12 alkeistapausta, a-kohdan tapahtumalla olisi kaksi suotuisaa alkeistapausta (AB ja BA) ja b-kohdan tapahtumalla kuusi suotuisaa alkeistapausta (AB, AC, AD, BA, CA ja DA). Kaikki lukumäärät ovat kaksinkertaisia esimerkin ratkaisutapaan verrattuna, ja todennäköisyydet ovat samoja. Siis samassa todennäköisyysongelmassa perusjoukko voidaan usein valita eri tavoilla.

Vastatapahtuman todennäköisyys

Vastatapahtuman $\overline{A}$ todennäköisyys saadaan vähentämällä tapahtuman A todennäköisyys luvusta 1.

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$$

Toisin sanoen:

$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = 1.$

Tapahtuman ja sen vastatapahtuman todennäköisyyksien summa on 1.

ESIMERKKI 2

Neljän hengen seurueesta, jonka muodostavat Antti, Birgitta, Carola ja Daniel, kaksi mahtuu taksiin. Taksiin pääsijät valitaan arvalla. Esimerkissä 1 laskettiin tapahtuman A: ”Antti ja Birgitta pääsevät molemmat taksiin” todennäköisyys $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{6}$. Muotoile tapahtuman A vastatapahtuma $\overline{A}$ ja laske sen todennäköisyys.

Ratkaisu

Tapahtuman A: ”Antti ja Birgitta pääsevät molemmat taksiin” vastatapahtuma $\overline{A}$ on ”Antti ja Birgitta eivät molemmat pääse taksiin”. Vastatapahtuma voidaan muotoilla myös toisin: esimerkiksi ”ainakin toinen Antista ja Birgitasta jää pois taksista” tai ”Antti ei pääse taksiin tai Birgitta ei pääse taksiin”.

Vastatapahtuman $\overline{A}$ todennäköisyys on

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Vastaus

$\overline{A}$: ”Antti ja Birgitta eivät molemmat pääse taksiin”, $\mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{5}{6}$.

ESIMERKKI 3

Millä todennäköisyydellä perheeseen syntyvä lapsi on poika?

Ratkaisu

Perusjoukko {poika, tyttö} muodostuu kahdesta alkeistapauksesta. Kokemuksen perusteella tyttöjä ja poikia syntyy suurin piirtein yhtä paljon. Tätä ei kuitenkaan selitä mikään luonnollinen symmetria, niin kuin esimerkiksi rahanheitossa kolikon symmetrialla voidaan perustella kruunan ja klaavan samaa todennäköisyyttä. Ainoa tapa selvittää todennäköisyys on laskea syntyvyystilastoista syntyvien poikien osuus kaikista syntyvistä lapsista.

Syntyneet Suomessa vuosina 1998–2004

vuosi	syntyneitä	syntyneitä, pojat
1998	57 039	29 085
1999	57 658	29 451
2000	56 772	29 274
2001	55 998	28 637
2002	55 546	28 560
2003	56 632	28 842
2004	57 532	29 633

Lähde: STAKES

Vuonna 1998 suhde $\frac{\text{pojat}}{\text{syntyneet}}$ oli $\frac{29\,085}{57\,039} \approx 0{,}5099$.

Vuosina 1998–1999 suhde oli $\frac{29\,085 + 29\,451}{57\,039 + 57\,658} = \frac{58\,536}{114\,697} \approx 0{,}5104$.

Kasvatetaan aineistoa vuosi kerrallaan.

	syntyneitä	poikia	suhde
1998	57 039	29 085	0,5099
1998–1999	114 697	58 536	0,5105
1998–2000	171 469	87 810	0,5121
1998–2001	227 467	116 447	0,5119
1998–2002	283 013	145 007	0,5124
1998–2003	339 645	173 849	0,5119
1998–2004	397 177	203 482	0,5123

Suhde vakiintuu noin 0,512:een. Sama suhde on saatu myös laajoissa kansainvälisissä tutkimuksissa.

Vastaus 0,512

Tilastollinen todennäköisyys

Jos tapahtumaa ei voida kuvailla yhtä todennäköisten alkeistapausten avulla, tapahtuman todennäköisyyttä voidaan tutkia tilastojen avulla tai kokeellisesti. Näin saadaan tapahtuman A *tilastollinen* eli *kokeellinen todennäköisyys.*

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{niiden tilastoyksikköjen lukumäärä, joissa } A \text{ tapahtui}}{\text{kaikkien tilastoyksikköjen lukumäärä}}.$$

Luvun alussa ongelmassa 2 kysyttiin, millä todennäköisyydellä tulitikkulaatikko jää lattialle pudotessaan raapaisupinnalleen. Ainoa keino selvittää todennäköisyys on heittää tulitikkulaatikkoa toistuvasti. Eräässä 1 000 heiton koesarjassa, jossa kymmentä samanlaista täyttä tulitikkulaatikkoa heitettiin jokaista 100 kertaa, laatikko jäi puulattialle pudotessaan raapaisupinnalle 108 kertaa. Tämän mukaan todennäköisyys, että laatikko jää raapaisupinnalle, on likimain $\frac{108}{1000} \approx 0{,}11$. Tutkittavaa ilmiötä ei voi pitää puhtaasti satunnaisilmiönä, sillä tulokseen voidaan vaikuttaa heittotavalla. Tulosta ei voida myöskään yleistää vajaille tai muiden valmistajien tulitikkurasioille. Tulokseen vaikuttanee myös lattiamateriaali.

Esimerkissä 3 laskettiin tilastoista todennäköisyys, että syntyvä lapsi on poika. Laajoista tilastoista laskettua todennäköisyyttä 0,512 voidaan pitää luotettavana ja sitä voidaan käyttää hyväksi esimerkiksi väestötutkimuksessa.

Klassinen todennäköisyys on teoreettinen käsite, joka perustuu oletukseen esimerkiksi arpanopan tai kolikon täydellisestä symmetriasta. Todellisuudessa täydellistä symmetriaa ei ole. Vaikka kolikot pyritäänkin tasapainottamaan niin, että massa jakautuu mahdollisimman symmetrisesti, niin kruuna- ja klaavapuoli ovat kuitenkin erilaiset. Symmetriaoletuksen pätevyyttä voidaan tutkia kokeellisesti, sillä pitkässä koesarjassa kokeellisen todennäköisyyden tulee lähetä tapahtuman klassista todennäköisyyttä.

Klassinen todennäköisyys saada kolikonheitolla kruuna on $\frac{1}{2} = 0{,}5$, kun alkeistapauksia kruuna ja klaava pidetään yhtä todennäköisinä.
Ranskalainen luonnontutkija kreivi Georges de Buffon (1707–88) suoritti 4 040 kolikonheiton kokeen, jossa hän sai kruunan 2 048 kertaa. Kokeellinen todennäköisyys $\frac{2\,048}{4\,040} \approx 0{,}507$ on lähellä tapahtuman klassista todennäköisyyttä. Englantilainen tilastotieteilijä Karl Pearson (1857–1936) heitti kolikkoa 12 000 kertaa ja sai 6 019 kruunaa. Kokeellinen todennäköisyys oli noin 0,5016.

Jos symmetriaoletusta voidaan pitää hyväksyttävänä, niin tapahtumalle lasketun klassisen todennäköisyyden avulla voidaan ennustaa tapahtuman esiintymistiheyttä.

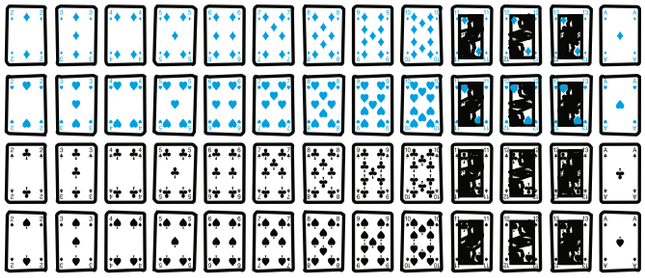
Heitetään kahta noppaa ja lasketaan aina silmälukujen summa. Seuraavassa luvussa nähdään, että silmälukujen summa on 8 todennäköisyydellä $\frac{5}{36}$. Jos siis kahta noppaa heitetään 1 500 kertaa, silmälukujen summa 8 saadaan noin $\frac{5}{36} \cdot 1\,500 \approx 208$ kertaa.

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

1. Arpanoppaa heitetään kerran. Mikä on todennäköisyys, että saatu silmäluku on
a) 4
b) vähintään 4
c) suurempi kuin 4
d) enintään 4
e) enintään 6
f) suurempi kuin 6?

2. Pakasta nostetaan kortti. Millä todennäköisyydellä nostettu kortti on
a) ässä b) pata
c) pata tai ässä d) pataässä?



3. Pekan pakasta vetämät neljä korttia ovat hertta 5, hertta 6, hertta 7 ja pata 7. Mikä on todennäköisyys, että seuraava kortti on
a) hertta b) 7 c) 5 tai 6?

4. Hannu ja Iines ovat mukana neljän hengen seurueessa, joista kaksi mahtuu telttaan. Nämä kaksi valitaan arpomalla. Nimeä seurueen kaksi muuta jäsentä ja luettele kaikki mahdolliset arvonnan tuloksena saatavat parit. Ovatko kaikki parit yhtä mahdollisia? Laske edelleen, millä todennäköisyydellä
a) Hannu pääsee telttaan
b) Hannu pääsee telttaan ja Iines ei pääse telttaan
c) Hannu ja Iines pääsevät molemmat telttaan.
d) Mikä on c-kohdan tapahtuman vastatapahtuma? Mikä on vastatapahtuman todennäköisyys?

5. Viidestä odottajasta kolme pääsee lentokoneen ylijäämäpaikoille. Koneeseen pääsijät valitaan arvalla. Hannu ja Iines ovat odottajien joukossa. Millä todennäköisyydellä
a) Hannu pääsee koneeseen
b) Hannu ja Iines pääsevät koneeseen
c) Hannu pääsee, mutta Iines ei pääse?

6. Kolikkoa heitetään kerran. Mikä on todennäköisyys, että tulee kruuna? Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?
a) Kolikkoa heitettäessä joka toisella heitolla tulee kruuna.
b) Kun kolikkoa heitetään kaksi kertaa, niin jommallakummalla heitolla saadaan kruuna.
c) Kun kolikkoa heitetään sata kertaa, niin tulee viisikymmentä kruunaa.
d) Kun kolikkoa heitetään satoja kertoja, niin noin 50 % tuloksista on kruunia.

7. Kyselyn mukaan lukion 417 oppilaasta 186 harrastaa liikuntaa, 136 musiikkia ja 74 sekä liikuntaa että musiikkia.
a) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu liikunnan harrastaja harrastaa myös musiikkia?
b) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu lukion oppilas harrastaa liikuntaa tai musiikkia?

8. Seuraavat ns. eloonjäämisluvut ilmaisevat 20-, 40-, 60- ja 80-vuotiaina elossa olevien suomalaisten miesten ja naisten lukumäärän tuhatta elävänä syntynyttä kohden.

ikä	miehiä	naisia
0	1 000	1 000
20	986	992
40	951	979
60	801	922
80	294	551

Taulukon tiedot ovat vuodelta 1986. Oletetaan, että luvut pysyvät samoina. Laske 20-vuotiaalle miehelle ja samanikäiselle naiselle todennäköisyys, että hän
a) elää yli 60-vuotiaaksi
b) ei saavuta 80 vuoden ikää.

9. Tutkittaessa tuhannen sähkölampun kestoikää saatiin seuraava tilasto.

kestoikä (h)	lamppuja
– 999	472
1000 – 1999	269
2000 – 2999	142
3000 – 3999	87
4000 – 4999	23
5000 –	7

Millä todennäköisyydellä lamppu kestää
a) vähemmän kuin 3 000 tuntia
b) vähintään 2 000 tuntia?
c) Millä todennäköisyydellä lamppu, joka on kestänyt 2 000 tuntia, kestää vielä vähintään 1 000 tuntia?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

10. Mikä on todennäköisyys, että vuonna 1991 syntynyt henkilö on syntynyt jonkin kuukauden viimeisenä päivänä?

11. Sekoitetun korttipakan päällimmäinen kortti oli pataässä. Millä todennäköisyydellä toinen kortti on a) pata b) hertta c) ässä d) kuningas?

12. a) Ensimmäiset kolme Lauralle jaettua pelikorttia ovat kaikki samaa maata. Kumpi on todennäköisempää: että seuraavakin kortti on samaa maata vai että seuraava kortti on samanarvoinen kuin jokin jo kädessä oleva?
b) Kävi niin, että neljäskin kortti oli samaa maata. Kumpi nyt on todennäköisempää: että viideskin on samaa maata vai että viides kortti on jonkin kädessä jo olevan kortin pari?

13. Koneen tuottamista suksista 4 % on myyntiin kelpaamattomia virheellisiä suksia, 14 % lievästi viallista halvemmalla myytävää B-laatua ja loput virheetöntä A-laatua. Millä todennäköisyydellä tuotantolinjalta umpimähkään valittu suksi on
a) A-laatua
b) myyntiin kelpaava?
c) Millä todennäköisyydellä suksi, joka on kelpuutettu myyntiin, on A-laatua?

14. Laatikossa on kaksi paria sukkia. Tuomas, joka muun perheen nukkuessa ei uskalla sytyttää valoja, ottaa laatikosta kaksi sukkaa.
a) Nimeä sukat ja luettele kaikki yhtä mahdolliset alkeistapaukset.
b) Millä todennäköisyydellä Tuomas saa parin?
c) Mikä on b-kohdan tapahtuman vastatapahtuma? Mikä on vastatapahtuman todennäköisyys?

15. Jäljellä on viisi arpaa, joista kahden tiedetään voittavan. Ville ostaa kaksi arpaa. Millä todennäköisyydellä
a) kumpikaan arpa ei voita
b) molemmat arvat voittavat?
c) Mikä on a-kohdan tapahtuman vastatapahtuma? Mikä on vastatapahtuman todennäköisyys?
d) Mikä on b-kohdan tapahtuman vastatapahtuma? Mikä on vastatapahtuman todennäköisyys?

16. Mikä on todennäköisyys, että perheeseen odotettu lapsi syntyy viikonloppuna? Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?
a) Seitsenlapsisessa perheessä on aina kaksi lasta, jotka ovat syntyneet viikonloppuna.
b) Jos perheen kaksi ensimmäistä lasta ovat syntyneet viikonloppuna, niin seuraavat viisi eivät synny viikonloppuna.
c) Opetusryhmässä, jossa on 21 oppilasta, on kuusi viikonloppuna syntynyttä.
d) Tällä hetkellä elävistä maapallon ihmisistä 29 % on syntynyt viikonloppuna.

17. Laske tehtävän 8 taulukon avulla erikseen miehille ja naisille, millä todennäköisyydellä
a) vastasyntynyt elää yli 80-vuotiaaksi
b) 40-vuotias ei elä 80-vuotiaaksi
c) 40-vuotiaan jäljellä oleva elinikä on 20–40 vuotta.

18. Seuraavassa taulukossa on joitakin kuolinsyitä sekä arvoitu todennäköisyys, että Yhdysvaltain asukas kuolee kyseiseen syyhyn.
(Lähde: Nature, 6.1.1994)

kuolinsyy	todennäköisyys
tieliikenneonnettomuus	1/100
murha	1/300
tulipalo	1/800
tuliaseonnettomuus	1/2 500
sähköisku	1/5 000
asteroidin/komeetan törmäys maapalloon	1/20 000
liikennelentokoneen onnettomuus	1/20 000
tulva	1/30 000
pyörremyrsky	1/60 000
käärmeenpurema tai hyönteisen pisto	1/100 000
ilotulitusonnettomuus	1/1 000 000
botuliinimyrkytys	1/3 000 000
juomavesi, jossa on sallittu määrä trikloorietyleeniä	1/10 000 000

a) Ovatko todennäköisyydet yhtä suuret kaikille Yhdysvaltain asukkaille? Mitä taulukon todennäköisyydet tarkoittavat?
b) Asteroidin tai komeetan maahantörmäys ei vaikuta kovin tavalliselta kuolinsyyltä. Kuitenkin se on kuolinsyynä yhtä todennäköinen kuin lento-onnettomuus ja kolme kertaa niin todennäköinen kuin pyörremyrsky. Kuinka tämä on selitettävissä?
c) Kuinka on mahdollista, että juomavedessä sallitaan olevan niin suuri määrä trikloorietyleeniä, että veden juomiseen voi kuolla?

19. Oppilaskyselyn mukaan 82 % lukion oppilaista on tyytyväisiä opetukseen, 74 % on tyytyväisiä oppilaanohjaukseen ja 63 % on tyytyväisiä sekä opetukseen että oppilaanohjaukseen.
a) Millä todennäköisyydellä oppilaanohjaukseen tyytyväinen oppilas on tyytyväinen myös opetukseen?
b) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu lukion oppilas on tyytymätön sekä opetukseen että oppilaanohjaukseen?

20. Auton maahantuoja tutki, kuinka monen ajokilometrin jälkeen erään automallin 500 autoon ilmaantui ensimmäinen merkittävä korjausta vaativa vika.

ajomatka (km)	autoja
– 9 999	160
10 000 – 19 999	81
20 000 – 29 999	130
30 000 – 39 999	72
40 000 –	57

a) Millä todennäköisyydellä autolla voi ajaa 30 000 km ennen ensimmäisen vian ilmaantumista?
b) Millä todennäköisyydellä auto, joka on toiminut moitteetta ensimmäiset 10 000 km, toimii moitteetta myös seuraavat 10 000 km?

21.

Audiolaitteet kotitalouksissa 1999

Erillinen CD-soitin	53 %
Radionauhuri/CD-soitin -yhdistelmä	51 %
Radionauhuri ilman CD-soitinta	56 %
Radionauhuri, yhteensä	82 %
CD-soitin, yhteensä	65 %

Lähde: Tilastokeskus

a) Millä todennäköisyydellä kotitaloudessa, jossa on erillinen CD-soitin, on myös radionauhuri/CD-soitin -yhdistelmä?
b) Millä todennäköisyydellä kotitaloudessa, jossa on radionauhuri/CD-soitin -yhdistelmä, on myös radionauhuri ilman CD-soitinta?

22. Sadan ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun joukosta arvotaan yksi luku. Millä todennäköisyydellä saatu luku on
a) jaollinen luvulla 3
b) jaollinen luvulla 13
c) jaollinen luvuilla 3 ja 13
d) jaollinen ainakin toisella luvuista 3 ja 13?

23. Tapahtuman klassiselle todennäköisyydelle voidaan laskea likiarvo *simuloimalla* koetta jollain sopivalla satunnaismenetelmällä. Esimerkiksi edellisen tehtävän todennäköisyyksiä voidaan arvioida sijoittamalla hattuun sata numeroitua paperilappua, nostamalla lappu, kirjaamalla tulos, palauttamalla lappu hattuun, sekoittamalla laput, nostamalla taas lappu jne. Simuloinnin voi suorittaa myös käyttämällä useissa laskimissa olevaa satunnaislukutoimintoa. Näppäimellä rand tai rnd laskin arpoo välillä $[0, 1[$ olevan desimaaliluvun. Kun laskimeen on syötetty esimerkiksi lauseke $3 \times \text{rand}$, niin näppäimellä Enter saadaan aina uusi satunnaisluku väliltä $[0, 3[$. Kokonaislukuja voidaan arpoa käyttämällä hyväksi laskimen int-näppäintä, joka määrittää luvun kokonaisosan. Esimerkiksi lausekkeen $\text{int}(3 \times \text{rand})$ arvot ovat joukosta $\{0, 1, 2\}$ arvottuja kokonaislukuja.
a) Muodosta lauseke, jonka arvoja laskemalla voidaan simuloida nopanheittoa.
b) Muodosta lauseke, joka simuloi seuraavaa satunnaiskoetta: Noppaa heitetään kahdesti ja lasketaan pistelukujen summa. Määritä simuloimalla todennäköisyys, että pistelukujen summa on vähintään 10.

Todennäköisyyksiä alkeistapauksia laskemalla

Ongelma

Heitetään kahta noppaa ja lasketaan silmälukujen summa.
a) Ovatko summat 7 ja 12 yhtä todennäköiset? Jos eivät ole, niin kumpi summa on todennäköisempi?
b) Kumpi summista 3 ja 7 on todennäköisempi?

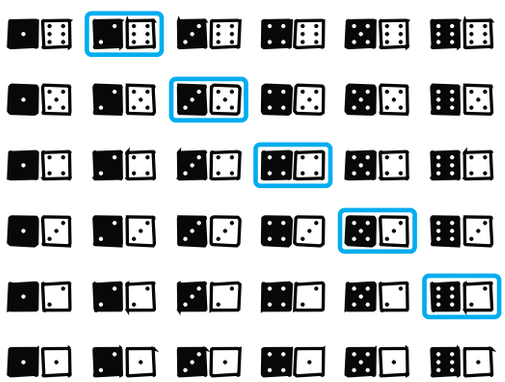
ESIMERKKI 1

Pelaaja heittää kahta noppaa, joista toinen on musta ja toinen valkoinen. Millä todennäköisyydellä
a) noppien silmälukujen summa on 8
b) mustan nopan silmäluku on suurempi?

Ratkaisu

a) Kun heitetään kahta noppaa, niin silmälukujen summa on jokin luvuista 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ja 12. Kaikki summat eivät kuitenkaan ole yhtä todennäköiset, sillä esimerkiksi summa 2 tulee vain silloin, kun molempien noppien silmäluku on 1, kun taas summa 5 voi tulla usealla eri tavalla: $4+1$, $3+2$, $2+3$ ja $1+4$. Eri summien joukkoa ei siis voida käyttää perusjoukkona.

Kuviossa ovat kaikki heittotulokset, jotka voidaan saada, kun heitetään kahta noppaa. Heittotuloksia on 36, ja jokainen niistä on yhtä todennäköinen.

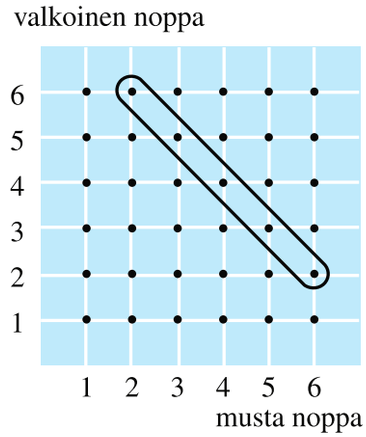


Tapahtumalle ”silmälukujen summa on 8” suotuiset alkeistapaukset on merkitty kuvioon. Suotuisten alkeistapauksien lukumäärä on 5.

$$P(\text{silmälukujen summa on } 8) = \frac{5}{36} \approx 0{,}14$$

Alkeistapaukset voidaan merkitä myös koordinaatistoon. Koordinaatit ovat noppien silmälukuja.

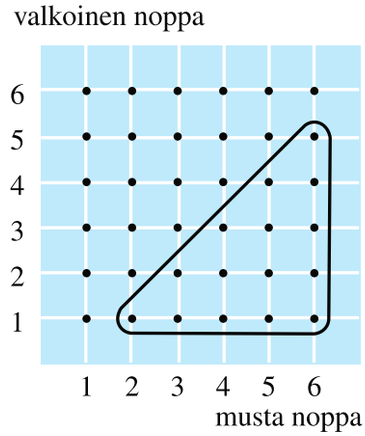
Tapahtumalle ”silmälukujen summa on 8” suotuiset alkeistapaukset $(6, 2)$, $(5, 3)$ jne. on ympäröity.



b) Kuvioon on merkitty tapahtumalle ”mustan nopan silmäluku on suurempi” suotuiset alkeistapaukset. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on 15.

P(mustan nopan silmäluku on suurempi)

$= \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \approx 0{,}42$



Vastaus a) $\frac{5}{36} \approx 0{,}14$ b) $\frac{5}{12} \approx 0{,}42$

ESIMERKKI 2

Pelaaja heittää kolmea kolikkoa. Millä todennäköisyydellä tulee
a) tasan kaksi klaavaa b) ainakin kaksi klaavaa?

Ratkaisu

Todennäköisyyteen ei vaikuta, heitetäänkö lantit yhtä aikaa vai yksitellen peräkkäin. Ajatellaan, että lantit heitetään yksitellen peräkkäin, ja kirjataan kaikki mahdolliset yhdistelmät. Kirjanpito voidaan järjestää esimerkiksi klaavojen lukumäärän mukaan.

Taulukossa on L = kLaava ja R = kRuuna.

	1. heitto	2. heitto	3. heitto
kolme klaavaa	L	L	L
kaksi klaavaa	L	L	R
	L	R	L
	R	L	L
yksi klaava	L	R	R
	R	L	R
	R	R	L
ei yhtään klaavaa	R	R	R

Mahdollisia alkeistapauksia on 8. Kaikki alkeistapaukset ovat yhtä todennäköisiä.

a) Tapahtumalle ”tasan kaksi klaavaa” suotuisia alkeistapauksia on kolme. Siis

$$P(\text{tasan kaksi klaavaa}) = \frac{3}{8}.$$

b) Klaavoja on ainakin kaksi silloin, kun niitä on kaksi tai kolme. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on neljä. Siis

$$P(\text{ainakin kaksi klaavaa}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Vastaus

a) $\frac{3}{8} \approx 0{,}38$ b) $\frac{1}{2} = 0{,}5$

ESIMERKKI 3

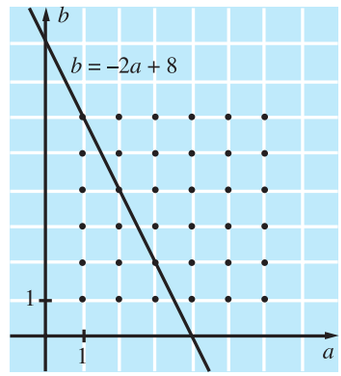
Ensimmäisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax + b$ kertoimet a ja b arvotaan nopalla. Millä todennäköisyydellä saadaan funktio, jolle pätee
a) $f(2) = 8$ b) $f(2) < 8$?

Ratkaisu

a) Funktiolle $f(x) = ax + b$ on $f(2) = 2a + b$.

Kertoimet a ja b arvotaan nopalla. On laskettava todennäköisyys, että $2a + b = 8$.

Koordinaatiston vaaka-akselilla on kertoimen a arvo ja pystyakselilla kertoimen b arvo. Koordinaatistoon on merkitty kaikki 36 yhtä mahdollista alkeistapausta.



Yhtälö $2a + b = 8$ toteutuu, kun $b = -2a + 8$. Suotuiset alkeistapaukset ovat suoralla, joka kulkee pisteen $(0, 8)$ kautta ja jonka kulmakerroin on -2.

Suotuiset alkeistapaukset ovat $(1, 6)$, $(2, 4)$ ja $(3, 2)$. Niiden lukumäärä on 3.

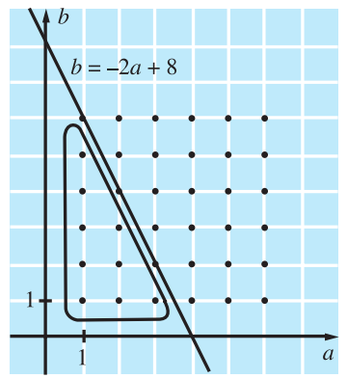
Siis $\mathrm{P}(f(2) = 8) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12} \approx 0{,}083$.

b) Epäyhtälö $f(2) < 8$ toteutuu, kun:

$2a + b < 8$

$b < -2a + 8$

Suotuisia alkeistapauksia ovat alkeistapaukset, jotka sijaitsevat suoran $b = -2a + 8$ alapuolella. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on 9.



Siis $\mathrm{P}(f(2) < 8) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

Vastaus

a) $\dfrac{1}{12} \approx 0{,}083$ b) $\dfrac{1}{4} = 0{,}25$

TEHTÄVIÄ

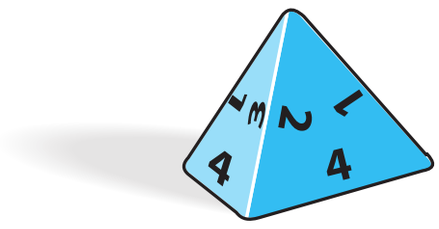
SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

24. Kahta noppaa heitetään. Millä todennäköisyydellä
a) silmälukujen summa on 9
b) silmälukujen summa on vähintään 9?

25. Noppaa heitetään kahdesti. Millä todennäköisyydellä
a) kumpikin silmäluku on 5
b) ainakin toinen silmäluku on 5
c) kumpikin silmäluku on vähintään 5
d) ainakin toinen silmäluku on vähintään 5?
e) Mikä on c-kohdan tapahtuman vastatapahtuma? Mikä on vastatapahtuman todennäköisyys?
f) Mikä on d-kohdan tapahtuman vastatapahtuma? Mikä on vastatapahtuman todennäköisyys?

26. Heitetään noppaa ja kolikkoa. Kolikon klaavasta saa 2 pistettä ja kruunasta 5 pistettä.
a) Millä todennäköisyydellä nopan silmäluvun ja kolikolla saadun pisteluvun summa on 6?
b) Millä todennäköisyydellä kolikon pisteluku on nopan silmälukua suurempi?

27. Heitetään tavallista kuution muotoista noppaa ja säännöllisen nelitahokkaan (tetraedrin) muotoista noppaa, jonka tahkoissa on silmäluvut 1, 2, 3 ja 4 ja jonka silmäluvun määrää alas jäävä tahko. Millä todennäköisyydellä
a) silmälukujen summa on 7
b) nelitahokkaan silmäluku on suurempi?



28. Kahta kolikkoa heitetään. Millä todennäköisyydellä tulee
a) kaksi klaavaa
b) kruuna ja klaava?

29. Pelaaja heittää kolikkoa kolmesti. Millä todennäköisyydellä
a) tulee yksi klaava
b) ainakin yksi klaava?

30. Koordinaatiston pisteen x- ja y-koordinaatit arvotaan nopalla. Millä todennäköisyydellä saadaan piste, joka on

a) suoralla $y = -\frac{1}{2}x + 5$

b) suoran $y = -\frac{1}{2}x + 5$ alapuolella?

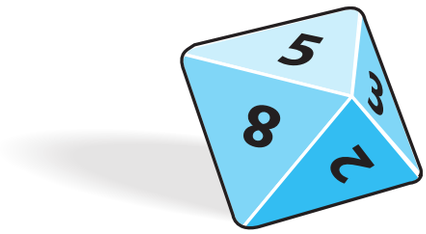
31. Ensimmäisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax + b$ kertoimet a ja b arvotaan nopalla. Millä todennäköisyydellä saadaan funktio, jolle pätee
a) $f(-2) = -1$ b) $f(-2) > -1$?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

32. Pelin lopussa Annasta tulee voittaja, jos hän saa kahdella nopalla pistesumman 7. Liisa voittaa, jos hän saa joko pistesumman 10 tai 11. Molempien onnistuessa kummastakin tulee voittaja. Kumpi on todennäköisempi voittaja?

33. Kannattaako lyödä vetoa sen puolesta, että kahta noppaa heitettäessä ainakin toisen nopan silmäluku on pienempi kuin 3? Vedonlyönti jonkin tapahtuman puolesta on – ainakin pitemmän päälle – kannattavaa, jos tapahtuman todennäköisyys on suurempi kuin 0,5.

34. Heitetään tavallista kuution muotoista noppaa ja säännöllisen kahdeksantahokkaan (oktaedrin) muotoista noppaa. Millä todennäköisyydellä
a) silmälukujen summa on 9
b) ainakin toinen silmäluku on vähintään 6
c) tavallisen nopan silmäluku on suurempi?



35. Kolikkoa heitetään neljästi. Millä todennäköisyydellä tulee
a) kaksi klaavaa
b) vähemmän kuin kaksi klaavaa?
c) Mikä on b-kohdan tapahtuman vastatapahtuma? Mikä on vastatapahtuman todennäköisyys?

36. Vektorien $\vec{a} = x\vec{i} - 3\vec{j}$ ja $\vec{b} = \vec{i} + y\vec{j}$ kertoimet x ja y arvotaan nopalla. Millä todennäköisyydellä saadaan toisiaan vastaan kohtisuorat vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$?

37. Suoran yhtälön $ax + by = 3$ kertoimet a ja b arvotaan nopalla. Millä todennäköisyydellä saadaan suora, joka kulkee pisteen $(1, -1)$ kautta?

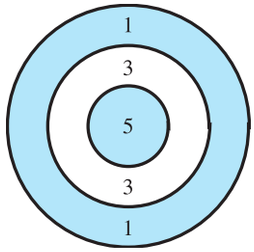
38. Suoran $y = kx + b$ kulmakerroin k ja vakiotermi b arvotaan nopalla.
a) Millä todennäköisyydellä saadaan suora, joka kulkee pisteen $(3, 8)$ kautta?
b) Millä todennäköisyydellä saadaan suora, joka leikkaa x-akselin pisteessä $(-2, 0)$?

39. Toisen asteen yhtälön $x^2 + px + q = 0$ kertoimet p ja q arvotaan nopalla. Millä todennäköisyydellä saadaan yhtälö, jolla on ainakin yksi juuri?

Geometrinen todennäköisyys

Ongelma

Maalitaulun ympyröiden säteet ovat 10 cm, 20 cm ja 30 cm. Nuoli osuu maalitaulun satunnaiseen kohtaan niin, että jokainen kohta on yhtä mahdollinen. Millä todennäköisyydellä saadaan pistemäärä a) 5 b) 3 c) 1?



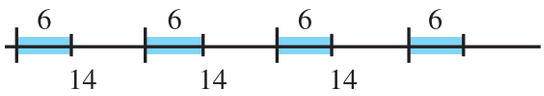
JOHDANTOESIMERKKI 1

Päätepysäkille saapuu 14 minuutin välein bussi, joka lähtee matkaan seisottuaan kuusi minuuttia. Tuomas, joka ei tiedä bussin aikataulua, saapuu pysäkille. Millä todennäköisyydellä hän pääsee heti sisälle bussiin?

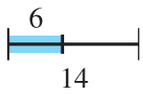
Ratkaisu

Jokaisella aikavälillä on ääretön määrä ajanhetkiä. Niiden luetteloiminen ja laskeminen ei ole mahdollista, joten perusjoukko ja tutkittava tapahtuma tulkitaan geometrisesti.

Bussien kulku noudattaa 14 minuutin pituista jaksoa. Jokaisen jakson alussa bussi seisoo 6 minuuttia päätepysäkillä. Havainnollistuksena voidaan käyttää lukusuoraa.



Pysäkille saapuminen vastaa pisteen valitsemista suoralta. Saapumishetki sijoittuu jollekin yksittäiselle 14 minuutin jaksolle. Jaksoa havainnollistaa 14 yksikön pituinen jana. Janan kuuden yksikön pituinen osa vastaa aikaa, jonka bussi seisoo pysäkillä.



Koska Tuomas ei tiedä aikataulua, kaikki janan pisteet ovat yhtä mahdollisia. Suotuisia ovat ne pisteet, jotka osuvat 6 yksikön pituiselle janan osalle. Todennäköisyys on suotuisen osan pituuden suhde koko janan pituuteen.

$$P(\text{heti sisään}) = \frac{6}{14} \approx 0{,}43$$

Vastaus

0,43

Edellisessä esimerkissä satunnaisilmiön perusjoukon muodostivat janan pisteet. Alkeistapauksia oli ääretön määrä. Alkeistapausten laskemisen sijasta laskettiin janan suotuisen osan pituuden suhde koko janan pituuteen. Laskettu todennäköisyys oli esimerkki niin sanotusta geometrisesta todennäköisyydestä.

Geometrinen todennäköisyys

Oletetaan, että satunnaiskokeen perusjoukko on jokin geometrinen joukko, esimerkiksi jana tai tason tai avaruuden alue, jonka jokainen piste on yhtä mahdollinen. Tällöin satunnaiskokeeseen liittyvän tapahtuman A *geometrinen todennäköisyys* on

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{tapahtumalle } A \text{ suotuisen osajoukon mitta}}{\text{perusjoukon mitta}}.$$

Perusjoukosta riippuen mitta on esimerkiksi pituus, pinta-ala, tilavuus tai kulman suuruus.

ESIMERKKI 2

Liisa ja Matti ovat sopineet tapaavansa ravintolassa kello 13:n ja 14:n välillä. Tarkempi kellonaika jäi sopimatta, ja niinpä kumpikin saapuu paikalle satunnaisena hetkenä kyseisen tunnin aikana.

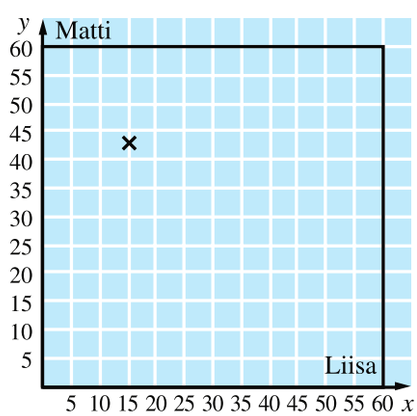
a) Millä todennäköisyydellä Liisa saapuu ennen Mattia?

b) Millä todennäköisyydellä Liisa joutuu odottamaan Mattia yli 15 minuuttia?

Ratkaisu

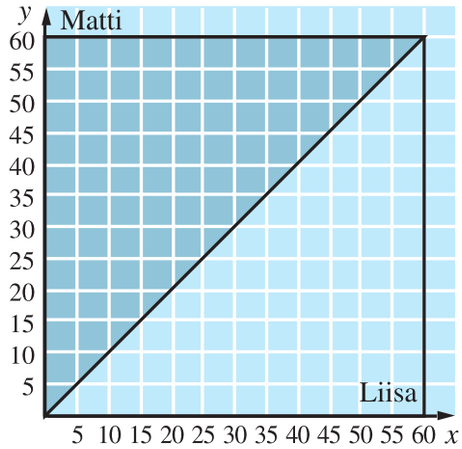
Molempien saapumishetket voidaan kuvata kordinaatistoon piirretyn neliön pisteenä. Pisteen x-koordinaatti on Liisan saapumisaika ja y-koordinaatti Matin saapumisaika.

Asteikot ovat minuutteina alkaen hetkestä 13.00. Esimerkiksi koordinaatistoon merkitty piste ilmaisee Liisan saapuneen noin kello 13.15 (x-koordinaatti) ja Matin noin kello 13.43 (y-koordinaatti).



Perusjoukko muodostuu neliön pisteistä. Koska kaikki saapumishetket ovat yhtä mahdollisia, todennäköisyys, että piste osuu johonkin neliön sisällä olevaan alueeseen, on yhtä suuri kuin alueen pinta-alan suhde neliön pinta-alaan.

a) Liisa saapuu ennen Mattia, jos Liisan saapumisaika x on aikaisempi kuin Matin saapumisaika y. Ne pisteet, joille on $y > x$, muodostavat kuvion tummennetun kolmion. Kolmion pinta-ala on puolet neliön pinta-alasta, joten todennäköisyys, että Liisa saapuu ennen Mattia, on 0,5.



b) Liisa joutuu odottamaan Mattia yli 15 minuuttia, jos Matin saapumisaika y on yli 15 minuuttia myöhäisempi kuin Liisan saapumisaika x, eli jos

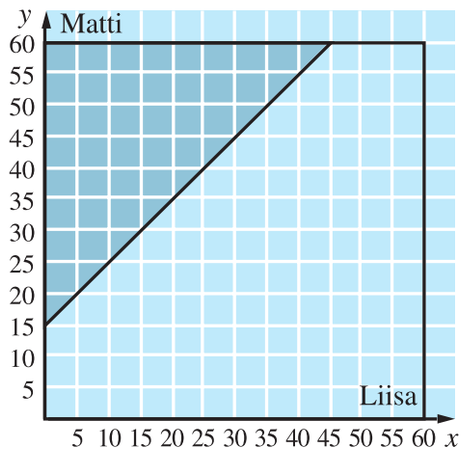
$$y > x + 15.$$

Neliön pisteet, jotka toteuttavat epäyhtälön $y > x + 15$, ovat suoran $y = x + 15$ yläpuolella. Pisteet muodostavat kolmion, jonka pinta-ala on

$$\frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 45 = 1\,012{,}5.$$

Kysytty todennäköisyys on kolmion pinta-alan suhde neliön pinta-alaan:

$$\frac{1\,012{,}5}{3\,600} \approx 0{,}28$$



Vastaus a) 0,5 b) 0,28

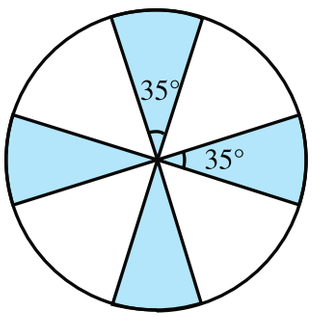
TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

40. Bussit lähtevät päätepysäkiltä puolen tunnin välein ja avaavat ovensa 5 minuuttia ennen lähtöä. Henkilö, joka ei tunne aikatauluja saapuu pysäkille. Millä todennäköisyydellä hän
a) pääsee heti bussiin
b) joutuu odottamaan sisälle bussiin pääsemistä enemmän kuin 10 minuuttia?

41. Suorakulmion muotoisen huoneen pituus on 5,0 m ja leveys 4,0 m. Lattialta etsitään lelusta irronnutta pientä ruuvia. Oletetaan, että jokainen lattian kohta on yhtä mahdollinen ruuvin sijaintipaikka. Millä todennäköisyydellä ruuvin etäisyys lähimmästä seinästä on alle puoli metriä?

42. Millä todennäköisyydellä leikkiruletti pysähtyy tummennetulle voittoalueelle?



43. Koordinaatiston pisteestä $(2, 4)$ lähdetään umpimähkäiseen suuntaan ja kuljetaan suoraan. Millä todennäköisyydellä ennen pitkää päädytään positiiviselle x-akselille?

44. Raidallisessa pöytäliinassa on vuoron perään 8,0 cm:n levyisiä valkoisia raitoja ja 6,0 cm:n levyisiä punaisia raitoja. Millä todennäköisyydellä pöydälle heitetty yhden euron kolikko asettuu niin, että se on osin valkoisella ja osin punaisella raidalla? Kolikon halkaisija on 23,8 mm.

45. Liisa ja Matti ovat sopineet tapaavansa ravintolassa kello 13:n ja 14:n välillä. Tarkempi kellonaika jäi sopimatta, ja niinpä kumpikin saapuu paikalle satunnaisena hetkenä kyseisen tunnin aikana. Millä todennäköisyydellä
a) molemmat saapuvat kellonajan 13.30 jälkeen
b) Liisa saapuu kello 13.30 jälkeen, ja hänen saapuessaan Matti on jo paikalla
c) toinen joutuu odottamaan toisen saapumista yli 20 minuuttia?

46. Väliltä $[0, 4]$ arvotaan kaksi lukua x ja y. Millä todennäköisyydellä lukujen x ja y summa on suurempi kuin 5?

47. Koordinaatiston pisteen x- ja y-koordinaatit valitaan umpimähkään väliltä $[-3, 3]$. Millä todennäköisyydellä piste on ympyrän $x^2 + y^2 = 9$ kehällä tai sisäpuolella?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

48. Väliltä $[-10, 5]$ arvotaan luku. Millä todennäköisyydellä
a) luvun itseisarvo on suurempi kuin 4
b) luvun neliö on pienempi kuin 9?

49. Heinäkasa on muodoltaan puolipallo, jonka säde on 3,0 m. Kasasta etsitään kadonnutta neulaa. Millä todennäköisyydellä neula on alle 70 cm:n etäisyydellä kasan pinnasta?

50. Jos 7,0 metrin päässä tiestä sijaitseva 12,0 metrin korkuinen sähköpylväs katkeaa tyvestä ja kaatuu, niin millä todennäköisyydellä pylvään pää osuu tielle?

51. Vyyhdellä oleva 25 metriä pitkä köysi katkaistaan satunnaisesta kohdasta. Millä todennäköisyydellä
a) toisen pätkän pituus on vähintään 17 metriä
b) köydenpätkien pituusero on vähemmän kuin 3 metriä?

52. Arvotaan luku x väliltä $]0, 2[$ ja luku y väliltä $]0, 3[$. Millä todennäköisyydellä on $x > y$?

53. Väliltä $]0, 2[$ arvotaan kaksi lukua. Millä todennäköisyydellä lukujen
a) summa on suurempi kuin 1
b) etäisyys toisistaan on pienempi kuin 1?

54. Arvotaan kaksi satunnaislukua väliltä $[-2, 2]$ ja lasketaan lukujen neliöiden summa. Millä todennäköisyydellä neliöiden summa on pienempi kuin 3?

55. Ruutukuvioisen pöytäliinan kuviot ovat neliöitä, joiden sivujen pituus on 5,0 cm. Pöydälle heitetään kolikko, jonka halkaisija on 1,8 cm. Millä todennäköisyydellä kolikko pöydälle pudottuaan
a) koskettaa neljää neliötä
b) koskettaa tasan kolmea neliötä?

56. Jana, jonka pituus on 7, katkaistaan satunnaisesta kohdasta ja osista muodostetaan suorakulmaisen kolmion kateetit. Millä todennäköisyydellä kolmion pinta-ala on suurempi kuin 5?

57. Toisen asteen yhtälön $x^2 + ax + 1 - a = 0$ parametrille a valitaan umpimähkäinen arvo väliltä $[-1, 1]$. Millä todennäköisyydellä saadaan yhtälö, jolla ei ole juuria?

58. a) Arvotaan luvut x ja y väliltä $]0, 1[$. Millä todennäköisyydellä lukujen x ja y neliöiden summa on pienempi kuin 1?
b) Määritä likiarvo luvulle π suorittamalla laskimen satunnaislukutoiminnolla a-kohdan satunnaiskoe 100 kertaa. Menetelmää, jolla määritetään luvun likiarvo tai yleisemmin matemaattisen ongelman likimääräinen ratkaisu satunnaiskokeen avulla, kutsutaan *Monte Carlo -menetelmäksi* (kuuluisan uhkapelikaupungin mukaan).*

59. Määritä Monte Carlo -menetelmällä (katso edellinen tehtävä)
a) käyrän $y = 1 - x^2$ ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala
b) likiarvo luvulle $\sqrt{3}$.

---

* Eräs tapa määrittää luvun π likiarvo on heittää neulaa paperille, jolla on ohuita yhdensuuntaisia viivoja, joiden väli on suurempi kuin neulan pituus. Jos nimittäin viivojen väli on a ja neulan pituus on b ($b < a$), niin voidaan osoittaa, että neula kosketttaa johonkin viivaan todennäköisyydellä $\frac{2b}{a\pi}$.
Vuonna 1901 italialainen matemaatikko Mario Lazzarini ilmoitti saaneensa tällä tavoin 3 408:lla neulanheitolla luvun π likiarvon 3,1415929. Likiarvossa on oikein luvun π kuusi ensimmäistä desimaalia. Tulos on liian tarkka ollakseen uskottava, ja kokeen suorittajaa on syytä epäillä koetulosten väärentämisestä.

Satunnaismuuttujan odotusarvo

Ongelma

Aino pelaa uhkapeliä. Heitetään kolikkoa. Jos tulee klaava, Aino saa kolme tulitikkua. Jos tulee kruuna, Aino menettää kaksi tulitikkua. Kuinka Ainolle pelissä pitkän päälle käy? Arvioi, kuinka monta tikkua Aino on voitolla tai tappiolla sadan pelikierroksen jälkeen. Kuinka monta tikkua Aino keskimäärin voittaa tai häviää yhdellä pelikierroksella?

Satunnaismuuttuja

Muuttujaa, jonka arvon määrää satunnaiskoe, kutsutaan *satunnaismuuttujaksi*.

Samaan satunnaiskokeeseen voi liittyä useita erilaisia satunnaismuuttujia. Heitetään esimerkiksi kahta noppaa. Silmälukujen summa on satunnaismuuttuja, jonka mahdolliset arvot ovat kokonaisluvut 2:sta 12:een. Kuutosten lukumäärä on satunnaismuuttuja, jonka mahdolliset arvot ovat 0, 1 ja 2.

Satunnaismuuttujaa merkitään yleensä aakkosten isolla kirjaimella.

Satunnaismuuttujan jakauma

Oletetaan, että satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat erillisiä lukuja.* Satunnaismuuttujan X *jakauma* tunnetaan, kun tiedetään satunnaismuuttujan kaikki mahdolliset arvot ja niiden todennäköisyydet.

---

* Tässä luvussa tutkitaan sellaisia satunnaismuuttujia, joiden mahdolliset arvot ovat erillisiä lukuja, eli niin sanottuja *diskreettejä satunnaismuuttujia*. Satunnaismuuttuja, jonka mahdollisten arvojen joukko on lukusuoran väli, on *jatkuva satunnaismuuttuja*. Esimerkiksi jos väliltä $]-5, 3[$ arvotaan luku x, niin satunnaismuuttuja ”luvun x neliö” on jatkuva satunnaismuuttuja, jonka arvojen joukko on väli $[0, 25[$. Jatkuvien satunnaismuuttujien jakaumaan perehdytään yleisesti syventävässä kurssissa Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi. Tämän kirjan luvussa Normaalijakauma tutustutaan erääseen tärkeään jatkuvien satunnaismuuttujien erikoistapaukseen.

ESIMERKKI 1

Aino pelaa uhkapeliä, jossa heitetään noppaa. Jos tulee silmäluku 1, 2 tai 3, Aino menettää 4 tulitikkua. Jos tulee silmäluku 4 tai 5, Aino saa 2 tulitikkua. Jos tulee silmäluku 6, Aino saa 5 tulitikkua. Olkoon satunnaismuuttuja X Ainon voitto yhdellä pelikierroksella. Määritä satunnaismuuttujan X jakauma.

Ratkaisu

Yhdellä kierroksella Aino voi hävitä 4 tikkua tai voittaa 2 tai 5 tikkua. Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat -4, 2 ja 5 tulitikkua. Määritetään kaikkien mahdollisten arvojen todennäköisyydet.

Satunnaismuuttuja X saa arvon -4, jos silmäluku on 1, 2 tai 3. Siis

$$\mathrm{P}(X = -4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Satunnaismuuttuja X saa arvon 2, jos silmäluku on 4 tai 5. Siis

$$\mathrm{P}(X = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Satunnaismuuttuja X saa arvon 5, jos silmäluku on 6. Siis

$$\mathrm{P}(X = 5) = \frac{1}{6}.$$

Jakauma voidaan kuvata myös taulukkona.

voitto (tulitikkua)	toden-näköisyys
-4	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{1}{6}$

Vastaus

Mahdolliset arvot -4, 2 ja 5.
Todennäköisyydet $\mathrm{P}(X = -4) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(X = 2) = \frac{1}{3}$ ja $\mathrm{P}(X = 5) = \frac{1}{6}$.*

---

* Tarkistukseksi voidaan laskea kaikkien todennäköisyyksien summa. Koska jokainen nopanheiton alkeistapaus on suotuisa jollekin tulosvaihtoehdolle, todennäköisyyksien summan tulee olla 1.

JOHDANTOESIMERKKI 2

Oletetaan, että Aino pelaa hyvin pitkään edellisen esimerkin 1 uhkapeliä. Arvioi, kuinka monta tulitikkua Aino keskimäärin häviää tai voittaa yhdellä kierroksella.

Ratkaisu

Olkoon satunnaismuuttuja X Ainon voitto yhdellä kierroksella. Esimerkissä 1 määritettiin satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot -4, 2 ja 5 ja niiden todennäköisyydet $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{6}$.

Kun peliä pelataan monta kierrosta, niin eri tulosten esiintymistiheyttä voidaan arvioida todennäköisyyksien avulla. Pitkän päälle Aino menettää 4 tikkua noin puolella kierroksista, voittaa 2 tikkua noin kolmasosalla kierroksista ja voittaa 5 tikkua noin kuudesosalla kierroksista. Keskimääräinen tulos kierrosta kohden on

$$\frac{1}{2} \cdot (-4) + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 5 = -2 + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Aino siis häviää noin $\frac{1}{2}$ tulitikkua pelattua kierrosta kohden.

Lausekkeessa

$$\frac{1}{2} \cdot (-4) + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 5$$

on satunnaismuuttujan X jokainen mahdollinen arvo kerrottu todennäköisyydellään ja tulot on laskettu yhteen.

Vastaus

Aino häviää keskimäärin $\frac{1}{2}$ tulitikkua kierrosta kohden.

Satunnaismuuttujan odotusarvo

Satunnaismuuttujan *odotusarvo* lasketaan niin, että satunnaismuuttujan jokainen mahdollinen arvo kerrotaan todennäköisyydellään ja tulot lasketaan yhteen.

Satunnaismuuttujan X odotusarvoa merkitään $\mathrm{E}(X)$.*

Jos satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ja näiden arvojen todennäköisyydet ovat vastaavasti $p_1, p_2, \ldots, p_n$, niin**

$$\mathrm{E}(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n.$$

Odotusarvon tulkinta

Kun satunnaiskoetta, johon tutkittu satunnaismuuttuja liittyy, toistetaan pitkään, niin satunnaismuuttujan saamien arvojen keskiarvo lähenee odotusarvoa.

Heitetään noppaa. Satunnaismuuttujan ”nopan silmäluku” mahdolliset arvot ovat 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Jokaisen arvon todennäköisyys on $\frac{1}{6}$, joten silmäluvun odotusarvo on

$$\mathrm{E}(\text{nopan silmäluku})$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3{,}5.$$

Siis kun noppaa heitetään pitkään, saatujen silmälukujen keskiarvo lähenee lukua 3,5.

---

* Kirjain E tulee odotusarvoa tarkoittavasta ranskan sanasta *espérance* tai englannin sanasta *expected value*.

** Annettu kaava määrittelee odotusarvon sellaisille diskreeteille satunnaismuuttujille, joiden mahdollisten arvojen joukko on äärellinen. Jos arvojen joukko on ääretön erillisten lukujen joukko (esimerkiksi positiivisten kokonaislukujen joukko), odotusarvo on äärettömän monesta yhteenlaskettavasta muodostuva summa. Tällaisia summia tutkitaan syventävässä kurssissa Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi. Yksi esimerkki diskreetistä satunnaismuuttujasta, jonka mahdollisten arvojen joukko on ääretön, on seuraava: Heitetään noppaa. Olkoon satunnaismuuttuja X sen heiton järjestysnumero, jolla saadaan ensimmäinen kuutonen.

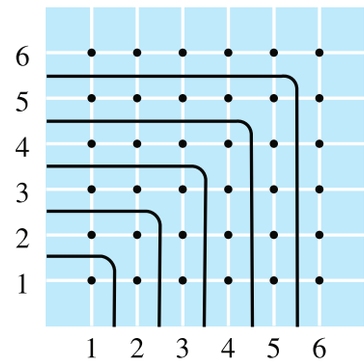
ESIMERKKI 3

Kahta noppaa heitetään. Määritä satunnaismuuttujan ”suurempi (tai yhteinen) silmäluku” odotusarvo.

Ratkaisu

Määritetään tutkittavan satunnaismuuttujan jakauma. Satunnaismuuttujan mahdolliset arvot ovat 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Arvojen todennäköisyydet voidaan päätellä kuviosta.

suurempi silmäluku	todennäköisyys
1	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{3}{36}$
3	$\frac{5}{36}$
4	$\frac{7}{36}$
5	$\frac{9}{36}$
6	$\frac{11}{36}$



Satunnaismuuttujan ”suurempi silmäluku” odotusarvo on

$$\frac{1}{36}\cdot 1+\frac{3}{36}\cdot 2+\frac{5}{36}\cdot 3+\frac{7}{36}\cdot 4+\frac{9}{36}\cdot 5+\frac{11}{36}\cdot 6=\frac{161}{36}=4\frac{17}{36}\approx 4{,}47.$$

Vastaus

$4\frac{17}{36}\approx 4{,}47$*

---

* Tulos siis tarkoittaa, että kun kahta noppaa heitetään pitkään ja joka kierroksella kirjataan silmäluvuista suurempi, niin suurempien silmälukujen keskiarvo lähenee lukua 4,47.

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

60. Aino pelaa uhkapeliä. Heitetään kolikkoa. Jos tulee klaava, Aino saa 3 tulitikkua. Jos tulee kruuna, Aino menettää 4 tulitikkua. Olkoon satunnaismuuttuja X Ainon voitto yhdellä kierroksella. Määritä satunnaismuuttujan X
a) jakauma b) odotusarvo.
c) Ennakoi pelin kulku Ainon kannalta.
Arvioi tilanne 200 heittokierroksen jälkeen.

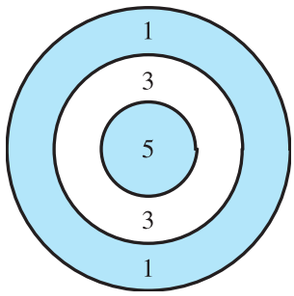
61. Heitetään noppaa. Mikä on silmäluvun neliön odotusarvo?

62. Aino ja Matti heittävät noppaa. Jos tulee ykkönen tai kakkonen, Aino maksaa Matille 4 euroa. Muuten Matti maksaa Ainolle 2 euroa. Onko peli reilu, eli onko molemmilla voiton odotusarvo nolla?

63. Onnenpyörässä on numerot 1:stä 20:een, kaikki yhtä todennäköisiä. Peliä pelataan kahden euron panoksella ja numeron osuessa saa 30 euroa. Mikä on pelaajan yhden kierroksen voiton odotusarvo?

64. Heitetään noppaa kahdesti. Mikä on silmälukujen summan odotusarvo?

65. Maalitaulun ympyröiden säteet ovat 10 cm, 20 cm ja 30 cm. Nuoli osuu maalitaulun satunnaiseen kohtaan niin, että jokainen kohta on yhtä mahdollinen. Mikä on pistemäärän odotusarvo?



66. Jokainen 20 henkilöstä sijoittaa pelikassaan euron ja veikkaa, tuleeko nopanheitossa kuutonen vai ei. Oikein veikanneet jakavat keskenään kassan. Viimeisenä veikkaava Matti sai selville, että muista pelaajista kaksi oli pelannut kuutosen puolesta ja 17 kuutosta vastaan. Mikä on Matin voiton odotusarvo, jos hän veikkaa
a) kuutosen puolesta
b) kuutosta vastaan?
c) Kuinka Matin kannattaa veikata?

67. Vakutuusyhtiöiden toiminta perustuu todennäköisyyslaskelmiin. Yhtiöt arvioivat vahinkojen todennäköisyyttä ja suuruutta ja hinnoittelevat vakuutukset niin, että odotusarvo on positiivinen. Seuraava vakuutusmatemaattinen ongelma on yksinkertaistettu, sillä todellisuudessa vakuutusmaksuihin vaikuttaa ennakoitu korkokanta, vakuutusyhtiön sijoitustoiminnan onnistuminen, eloonjäämisennusteet lasketaan joka ikävuodelle jne.
Oletetaan, että henkilö ottaa tietyn ikäisenä 100 000 euron henkivakuutuksen, joka on voimassa tiettyyn ikään saakka, ja maksaa vakuutusmaksun kokonaisuudessaan vakuutusta ottaessaan. Jos vakuutuksenottaja kuolee vakuutuksen voimassaoloaikana, vakuutusyhtiö maksaa 100 000 euroa vakuutetun omaisille. Käytä hyväksesi oheisia ns. eloonjäämislukuja ja laske vakuutusmaksun vähimmäismäärä, kun

a) 20-vuotias nainen ottaa henkivakuutuksen 40 vuoden ikään saakka
b) 20-vuotias mies ottaa henkivakuutuksen 40 vuoden ikään saakka
c) 40-vuotias nainen ottaa henkivakuutuksen 60 vuoden ikään saakka
d) 40-vuotias mies ottaa henkivakuutuksen 60 vuoden ikään saakka

ikä	miehiä	naisia
0	1000	1000
20	986	992
40	951	979
60	801	922
80	294	551

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

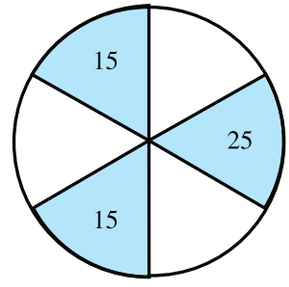
68. Televisio-ohjelmassa on peli, jossa studioyleisön joukosta arvottu pelaaja voittaa 100, 500, 2 000 tai 10 000 euroa. Peli on suunniteltu niin, että eri voittojen todennäköisyydet ovat taulukon mukaiset.

voitto	todennäköisyys
100	0,5
500	0,35
2 000	0,10
10 000	0,05

a) Mikä on pelaajan voiton odotusarvo?
b) Kuinka paljon rahaa ohjelman tuottajayhtiö voi arvioida kuluvan peliin lähetyskaudessa, jonka aikana ohjelma lähetetään 60 kertaa?

69. Pelissä heitetään kahta kolikkoa. Jos tulee kaksi klaavaa, Eino saa 5 tulitikkua. Jos tulee yksi klaava, Eino saa 2 tulitikkua. Jos ei tule yhtään klaavaa, Eino menettää 10 tulitikkua. Olkoon satunnaismuuttuja X Einon voitto yhdellä kierroksella.
a) Määritä satunnaismuuttujan X jakauma.
b) Mikä on satunnaismuuttujan X odotusarvo? Ennakoi, kuinka Einolle käy pelissä pitkän päälle.

70. Kuvan onnenpyörä on jaettu kuuteen yhtä suureen sektoriin, joista pelaajalle maksetaan kuvan mukainen määrä pelimerkkejä. Peliä pelataan 10 pelimerkin panoksilla. Mikä on pelaajan voiton odotusarvo yhdellä kierroksella? Ennakoi pelaajan tilanne 50 pelikierroksen jälkeen.



71. Sateen todennäköisyys paikkakunnalla ulkoilmakonserttipäivänä on 0,12. Konsertin järjestäjä ottaa 1 000 euroa maksavan sadevakuutuksen, joka sateen sattuessa korvaa 8 000 euroa. Mikä on vakuutuksen odotusarvo
a) konsertin järjestäjälle b) vakuutusyhtiölle?

72. Pelissä heitetään kolikkoa kolme kertaa. On sovittu, että jos tulee kolme klaavaa, pelaaja A saa 5 euroa, jos tulee kaksi klaavaa, A saa 3 euroa, ja jos tulee yksi klaava, A saa yhden euron. Jos ei tule yhtään klaavaa, A maksaa 15 euroa. Kannattaako A:n pelata peliä?

73. Laskinpelissä pelaaja arpoo satunnaisluvun väliltä $]0, 2[$ ja saa luvun neliön kokonaisosan (pilkkua edeltävän osan) osoittaman määrän pisteitä. Mikä on pistemäärän odotusarvo?

74. A ja B heittävät noppaa. Jos silmäluku on 6, A maksaa B:lle s^2 euroa ($s > 0$). Muussa tapauksessa B maksaa A:lle s euroa. Millä s:n arvoilla A:n voiton odotusarvo on positiivinen?

75. A ja B pelaavat seuraavilla säännöillä: Heitetään kahta noppaa. Jos silmäluvut ovat eri suuret, A maksaa B:lle silmälukujen summan osoittaman euromäärän. Jos silmäluvut ovat yhtä suuret, niin B maksaa A:lle ennalta sovitun rahamäärän. Kuinka suureksi A:n kannattaa tämä rahamäärä ehdottaa, jotta hän voisi luottaa jäävänsä voitolle koko yön jatkuvan pelaamisen jälkeen?

76. Kioskinpitäjä on ottanut joka viikko myytäväksi neljä erään viikottain ilmestyvän aikakausilehden irtonumeroa. Hän on myös joka viikko kirjannut myymiensä lehtien määrän ja saanut oheisen taulukon.

myytyjen lehtien lukumäärä	todennäköisyys
0	0,10
1	0,20
2	0,30
3	0,30
4	0,10

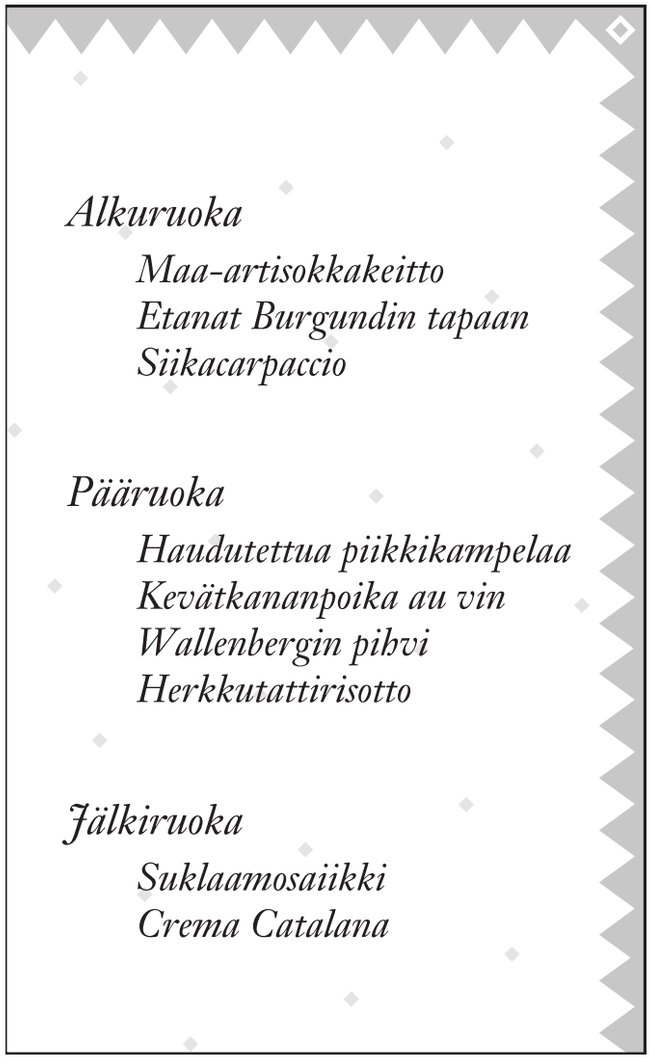
Jokaisesta irtonumerosta kioskinpitäjä maksaa 3 euroa. Lehden myyntihinta on 5 euroa. Myymätöntä lehteä ei voi palauttaa. Kuinka monta lehteä kioskinpitäjän kannattaa ottaa myytäväksi? Kuinka suuri hänen saamansa voiton odotusarvo silloin on?

77. Seuraava on todellinen noppapeli (kolmoset). Pelaaja maksaa ensin pelikassaan kolme euroa ja heittää sitten kahta noppaa. Jos tulee ainakin yksi kolmonen, pelaaja joutuu vielä maksamaan silmälukujen summan osoittaman rahamäärän. Jos ei tule yhtään kolmosta, pelaaja saa pelikassasta silmälukujen summan osoittaman rahamäärän. Onko peli reilu, eli onko pelaajan voiton odotusarvo nolla?

78. Ari ja Liisa pelaavat uhkapeliä laskimella. Ari näppäilee $2 \times$ rand ja Liisa näppäilee rand. Jos Arin luku on pienempi, hän maksaa Liisalle kolme tulitikkkua. Muutoin Liisa maksaa Arille tulitikun. Mikä on satunnaismuuttujan ”Arin voitto yhdellä kierroksella” odotusarvo?

Tuloperiaate

Ongelma Kuinka monta erilaista lounasta, johon kuuluu alkuruoka, pääruoka ja jälkiruoka, listalta voi sommitella?



JOHDANTOESIMERKKI 1

Kesälomamatkalla oleva Jaakko valitsee päällepantavaa.
Hänellä on mukanaan

neljät housut: uimahousut (uh), lyhyet housut (lh), farmarihousut (fh) ja suorat housut (sh)

kahdet kengät: juoksukengät (jk) ja puolikengät (pk) ja

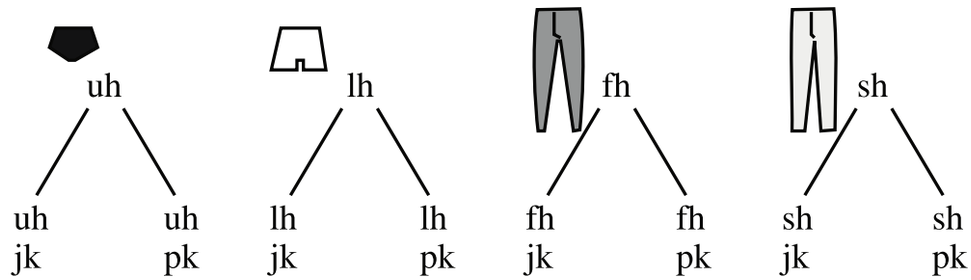
kolme paitaa: urheilupaita (up), T-paita (tp) ja kauluspaita (kp).

Kuinka monta erilaista asukokonaisuutta hän voi muodostaa, jos hän pukeutuu a) pelkkiin housuihin b) housuihin ja kenkiin c) housuihin, kenkiin ja paitaan?

Ratkaisu

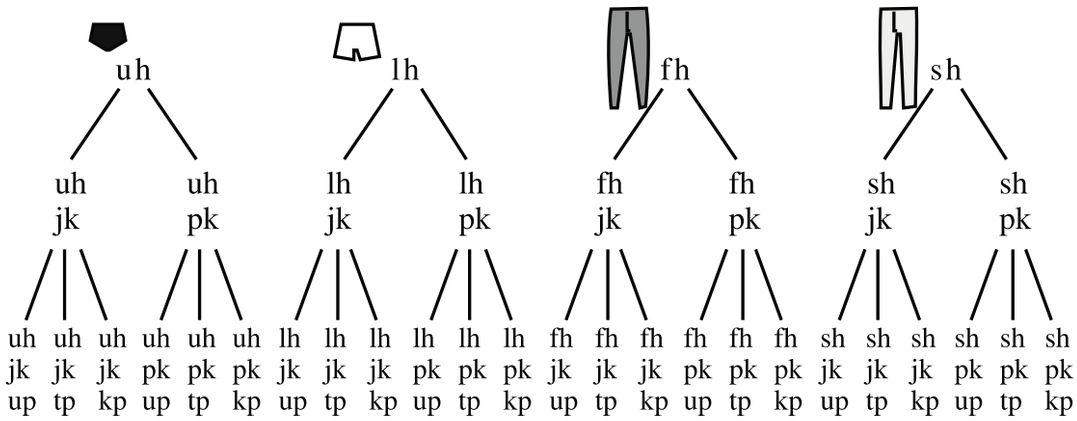
a) Housuvaihtoehtoja on neljä:

b) Kaikkien housujen kanssa Jaakko voi valita kumman tahansa kenkäparin.



Mahdollisia asukokonaisuuksia on $4 \cdot 2 = 8$.

c) Jokainen edellä valitusta kahdeksasta asusta voidaan täydentää kolmella eri tavalla.



Asukokonaisuuksia on $8 \cdot 3 = 24$.

Vastaus a) 4 b) 8 c) 24

Todennäköisyyslaskennassa ja muuallakin tarvitaan erilaisia menetelmiä, joilla voidaan laskea lukumääriä. Monet menetelmät perustuvat seuraavaan ns. *tuloperiaatteeseen*.

Tuloperiaate

Oletetaan, että kokonaisuuden valitseminen voidaan jakaa peräkkäisiin vaiheisiin. Jos vaiheita on k kappaletta, ja

1. vaiheessa on n_1 vaihtoehtoa
2. vaiheessa on n_2 vaihtoehtoa

.
.
.

k. vaiheessa on n_k vaihtoehtoa,

niin kokonaisuus voidaan valita $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ eri tavalla.

Siis valintamahdollisuuksien lukumäärä on peräkkäisten vaiheiden vaihtoehtojen lukumäärien tulo.

ESIMERKKI 2

Kuinka monta erilaista nelikirjaimista sanaa (ei välttämättä merkityksellistä) voi muodostaa aakkosten 29 kirjaimesta, jos
a) sama kirjain saa esiintyä useamman kerran
b) sama kirjain voi esiintyä vain kerran?

Ratkaisu

a) Muodostetaan sana vaiheittain valitsemalla ensin ensimmäinen kirjain, sitten toinen kirjain jne.

valitaan 1. kirjain	29 vaihtoehtoa
valitaan 2. kirjain	29 vaihtoehtoa
valitaan 3. kirjain	29 vaihtoehtoa
valitaan 4. kirjain	29 vaihtoehtoa

Tuloperiaatteen nojalla erilaisten sanojen lukumäärä on

$29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 = 29^4 = 707\,281.$

b) Koska sama kirjain ei saa toistua, jokainen valinta vähentää seuraavia vaihtoehtoja.

valitaan 1. kirjain	29 vaihtoehtoa
valitaan 2. kirjain	28 vaihtoehtoa
valitaan 3. kirjain	27 vaihtoehtoa
valitaan 4. kirjain	26 vaihtoehtoa

Tuloperiaatteen nojalla erilaisten sanojen lukumäärä on

$29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = 570\,024.$

Vastaus

a) $29^4 = 707\,281$ b) $29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = 570\,024$*

---

* Todennäköisyyslaskennassa kuvataan a- ja b-kohtien eroa usein käyttämällä sanaa *takaisinpano*. a-kohdassa laskettiin sanojen lukumäärä *takaisinpanolla*: ennen seuraavan kirjaimen valitsemista valittu kirjain pantiin takaisin. b-kohdassa laskettiin sanojen lukumäärä *ilman takaisinpanoa.* Kun jatkossa lasketaan alkeistapausten lukumääriä tuloperiaatteella, niin on tärkeää selvittää, tapahtuuko tutkittavassa satunnaiskokeessa takaisinpano vai ei.

ESIMERKKI 3

Vakioveikkauksessa on 13 veikkauskohdetta, joissa jokaisessa on valittavana merkki 1, × tai 2.

a) Kuinka monta erilaista veikkausriviä on?

b) Millä todennäköisyydellä arpomalla täytetyssä veikkausrivissä on 13 oikein?

Ratkaisu

a) Valitaan veikkausrivin 13 merkkiä peräkkäin yksitellen. Jokaiseksi merkiksi on kolme vaihtoehtoa.

valitaan 1. merkki — 3 vaihtoehtoa
valitaan 2. merkki — 3 vaihtoehtoa
.
.
.
valitaan 13. merkki — 3 vaihtoehtoa

Tuloperiaatteen nojalla veikkausrivejä on

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{\text{13 kappaletta}} = 3^{13} = 1\,594\,323 \text{ erilaista.}$$

b) Valitaan alkeistapauksiksi veikkausrivit. Alkeistapauksien lukumäärä on 3^{13}. Jos veikkausrivi valitaan arpomalla, niin jokainen rivi on yhtä mahdollinen. Tapahtumalle ”13 oikein” suotuisia alkeistapauksia on yksi, joten

$$P(\text{13 oikein}) = \frac{1}{3^{13}} = \frac{1}{1\,594\,323} \approx 6{,}3 \cdot 10^{-7}.$$

Vastaus

a) 1 594 323 b) $\dfrac{1}{1\,594\,323} \approx 6{,}3 \cdot 10^{-7}$

ESIMERKKI 4

Perheessä on neljä lasta (ei kaksosia). Millä todennäköisyydellä
a) kaikki lapset ovat syntyneet eri viikonpäivinä
b) ainakin kaksi on syntynyt samana viikonpäivänä?

Ratkaisu

a) Viikonpäivät, joina lapset ovat syntyneet, muodostavat syntymisjärjestyksessä lueteltuina neljän viikonpäivän jonon, jossa sama viikonpäivä voi toistua, esimerkiksi:

perjantai, keskiviikko, lauantai, perjantai.

Valitaan alkeistapauksiksi kaikki neljän viikonpäivän jonot. Jonojen lukumäärä voidaan laskea tuloperiaatteen avulla.

1. päivä 7 vaihtoehtoa
2. päivä 7 vaihtoehtoa
3. päivä 7 vaihtoehtoa
4. päivä 7 vaihtoehtoa

Jonojen lukumäärä on $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$, ja jokainen jono on yhtä mahdollinen.

Tapahtumalle ”kaikki lapset ovat syntyneet eri viikonpäivinä” suotuisia ovat ne neljän viikonpäivän jonot, joissa mikään viikonpäivä ei toistu.

1. päivä 7 vaihtoehtoa (mikä tahansa)
2. päivä 6 vaihtoehtoa (eri päivä kuin edellinen)
3. päivä 5 vaihtoehtoa (eri päivä kuin edelliset)
4. päivä 4 vaihtoehtoa (eri päivä kuin edelliset)

Tuloperiaatteen nojalla suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

$$\text{P(kaikki syntyneet eri viikonpäivinä)} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7^4} \approx 0{,}35$$

b) Tapahtuma ”ainakin kaksi on syntynyt samana viikonpäivänä” on tapahtuman ”kaikki syntyneet eri viikonpäivinä” vastatapahtuma, joten

$$\text{P(ainakin kaksi syntynyt samana viikonpäivänä)} = 1 - \text{P(kaikki syntyneet eri viikonpäivinä)} \approx 1 - 0{,}35 = 0{,}65.$$

Vastaus

a) 0,35 b) 0,65

ESIMERKKI 5

Pelaajalle jaetaan viisi pelikorttia. Millä todennäköisyydellä ainakin kaksi korteista on keskenään samanarvoisia?

Ratkaisu

Ajatellaan, että kortit jaetaan pakasta peräkkäin yksi kerrallaan. Valitaan alkeistapauksiksi viiden kortin jonot, joissa mikään kortti ei toistu.

1. kortti 52 vaihtoehtoa
2. kortti 51 vaihtoehtoa
3. kortti 50 vaihtoehtoa
4. kortti 49 vaihtoehtoa
5. kortti 48 vaihtoehtoa

Tuloperiaatteen nojalla kaikkien alkeistapausten lukumäärä on

$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$.

Tapahtumalle ”ainakin kaksi korteista on keskenään samanarvoisia” suotuisten alkeistapausten lukumäärää ei voida suoraan laskea tuloperiaatteella, sillä samanarvoisia kortteja voi tulla monella eri tavalla: esimerkiksi kolmas ja viides kortti samanarvoisia ja muut eriarvoisia tai ensimmäinen, kolmas ja neljäs keskenään samanarvoisia ja myös toinen ja viides keskenään samanarvoisia jne.

Vastatapahtumalle ”kaikki kortit ovat eriarvoisia” suotuisten alkeistapausten lukumäärä voidaan laskea suoraan tuloperiaatteella:

1. kortti 52 vaihtoehtoa
2. kortti 48 vaihtoehtoa (eriarvoinen kuin ensimmäinen)
3. kortti 44 vaihtoehtoa (eriarvoinen kuin edelliset)
4. kortti 40 vaihtoehtoa (eriarvoinen kuin edelliset)
5. kortti 36 vaihtoehtoa (eriarvoinen kuin edelliset)

Vastatapahtumalle ”kaikki kortit ovat eriarvoisia” suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36$.

Kysytty todennäköisyys saadaan vähentämällä vastatapahtuman todennäköisyys luvusta 1.

P(ainakin kaksi korteista on samanarvoisia) = 1 − P(kaikki eriarvoisia)

$$= 1 - \frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \approx 0{,}493$$

Vastaus 0,493

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

79. Automerkkiin on tarjolla 3 korivaihtoehtoa, 4 moottorivaihtoehtoa, 3 varusteluvaihtoehtoa ja 6 eri väriä. Kuinka monen mallin välillä ostaja joutuu valitsemaan?

80. 12 opetuslasta valitsevat keskuudestaan johtoryhmän, johon kuuluu puheenjohtaja, varapuheenjohtaja, sihteeri ja rahastonhoitaja. Kuinka monta erilaista johtoryhmää voidaan valita?

81. Avaimessa on yhdeksän lovea, joilla jokaisella on seitsemän vaihtoehtoista syvyyttä. Kuinka monta erilaista avainta on?

82. Raviveikkauksessa V5 veikataan viiden ravilähdön voittajaa. Oletetaan, että ensimmäisessä lähdössä on 12 hevosta, toisessa ja kolmannessa lähdössä molemmissa 16 hevosta, neljännessä 8 ja viidennessä 14 hevosta.
a) Kuinka monta erilaista V5-riviä voidaan tehdä?
b) Millä todennäköisyydellä arpomalla täytetyssä rivissä on 5 oikein?
c) Kuinka monta sellaista riviä on, joissa ei ole yhtään oikein?
d) Millä todennäköisyydellä arpomalla täytetyssä rivissä ei ole yhtään oikein?

83. a) Pakasta jaetaan neljä korttia. Millä todennäköisyydellä kortit ovat kaikki eri maata?
b) Millä todennäköisyydellä korttipakasta nostetut neljä korttia ovat kaikki eri maata, jos kortit aina nostamisen jälkeen pannaan takaisin pakkaan ja pakka sekoitetaan?

84. Kannattaako lyödä vetoa sen puolesta, että kolmea noppaa heitettäessä kaikissa nopissa on eri silmäluku? Vedonlyönti jonkin tapahtuman puolesta on – ainakin pitemmän päälle – kannattavaa, jos tapahtuman todennäköisyys on suurempi kuin 0,5.

85. Kannattaako lyödä vetoa sen puolesta, että kun pakasta jaetaan kolme korttia, niin ainakin kaksi on samaa maata?

86. Pelaajalle jaetaan viisi korttia. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi korteista on ässä?

87. Hatussa on kolme A-kirjainta, viisi I-kirjainta, neljä K-kirjainta ja kaksi S-kirjainta. Hatusta nostetaan neljä kirjainta yksitellen palauttamatta kirjaimia välillä hattuun. Millä todennäköisyydellä kirjaimet nostojärjestyksessä muodostavat sanan
a) SIKA b) AASI?

88. Arpajaisissa on 100 arpaa, joista 20 voittaa. Kaisa ostaa kolme arpaa. Mikä on todennäköisyys, että hän saa ainakin yhden voiton?

89. Sarjatuotannossa 50 valmiin tuotteen erä saapuu tarkastuspisteeseen. Tuotteista valitaan umpimähkään viisi, jotka tutkitaan. Jos mikään näistä ei ole viallinen, erä hyväksytään. Millä todennäköisyydellä erä, jossa on kymmenen viallista tuotetta, tulee hyväksytyksi?

90. Myyjäisten arpajaisissa on jäljellä viisi arpaa, joista kaksi on voittoarpoja. Aino päättää ostaa arpoja yksi kerrallaan, kunnes saa voittoarvan.
a) Millä todennäköisyydellä kolmas arpa on ensimmäinen voittoarpa?
b) Arvan hinta on 2 euroa. Mikä on arpojen ostoon kuluvan rahamäärän odotusarvo?

91. Eräässä raviveikkauksessa on arvattava ravilähdön kaksi ensimmäistä hevosta oikeassa maaliintulojärjestyksessä. Pelaaja laski, että ravien toisessa lähdössä, jossa oli viisi hevosta enemmän kuin ensimmäisessä, erilaisia veikkausmahdollisuuksia oli 100 enemmän kuin ensimmäisessä lähdössä. Kuinka monta hevosta lähdöissä oli?

SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

92. Eduskunta (200 jäsentä) valitsee keskuudestaan puhemiehen, ensimmäisen varapuhemiehen ja toisen varapuhemiehen. Valitut muodostavat eduskunnan puhemiehistön. Kuinka monta erilaista puhemiehistöä voidaan valita?

93. Kassakaapin numerolukossa on valittava oikeassa järjestyksessä viisi numeroa numeroista 1–18. Numerosarjassa sama numero voi esiintyä useammin kuin kerran. Kuinka monta eri sarjaa henkilö, joka ei tunne oikeata numerosarjaa, joutuu kokeilemaan, jos hänellä on huonoin mahdollinen onni?

94. Luokan ovenpielessä on viisi valokatkaisijaa. Kuinka monella eri tavalla luokka voi olla valaistuna?

95. Puheenjohtajan ja sihteerin muodostama yhdistyksen johtoryhmä valitaan vuosittain jäsenten joukosta arpomalla. Laskettiin, että erilaisten mahdollisten näin saatavien johtoryhmien lukumäärä on 5 852. Kuinka monta jäsentä yhdistyksessä on?

96. Maljassa on kaksi valkoista, kaksi punaista ja kaksi mustaa palloa. Maljasta nostetaan kolme palloa niin, että
a) nostettu pallo pannaan takaisin ennen seuraavaa nostoa
b) palloa ei panna takaisin.
Millä todennäköisyydellä nostetut pallot ovat kaikki eriväriset?

97. Pelaajalle jaetaan viisi pelikorttia. Millä todennäköisyydellä kaikki kortit
a) ovat samaa maata
b) eivät ole samaa maata?

98. Pelaajalle jaetaan kolme korttia. Kannattaako lyödä vetoa sen puolesta, että ainakin yksi korteista on pata?

99. Noppaa heitetään neljä kertaa. Millä todennäköisyydellä jokin silmäluku tulee useammin kuin kerran?

100. Ravintolaan on juhlavieraille katettu kahdeksan pyöreää kuuden hengen pöytää. Aviopuolisoille arvotaan paikat pöytiin. Millä todennäköisyydellä he päätyvät istumaan
a) vierekkäin
b) samaan pöytään
c) eri pöytiin?

101. Ryhmän 20 oppilaasta 13 on laskenut kotilaskunsa. Opettaja valitsee taululle arvalla kolme laskijaa. Millä todennäköisyydellä mukaan tulee ainakin yksi, joka ei ole laskenut laskujaan?

102. Viisi henkilöä kirjoittaa lapulle yhden kokonaisluvuista 1–10. Kukaan ei tiedä toisten kirjoittamia lukuja. Millä todennäköisyydellä
a) kaikissa lapuissa on eri numero
b) ainakin kahdessa lapussa on sama numero?

103. Mikä on todennäköisyys, että umpimähkään valitussa kuusinumeroisessa luonnollisessa luvussa on
a) ainakin kaksi samaa numeroa
b) ainakin yksi nolla?

104. Korttipakasta vedetään yksitellen kortteja. Mikä on todennäköisyys, että ensimmäinen hertta tulee viidentenä korttina?

105. Vaatekaapin korissa on 12 mustaa, 12 punaista ja 12 valkoista sukkaa. Korista nostetaan sukkia yksitellen, kunnes saadaan kaksi samanväristä sukkaa. Mikä on nostettavien sukkien lukumäärän odotusarvo?

106. Noppaa heitetään, kunnes jokin silmäluku tulee toisen kerran. Mikä on tarvittavien heittojen lukumäärän odotusarvo?

107. Toisen asteen polynomifunktion $ax^2 + bx + c$ kertoimet arvotaan nopalla. Millä todennäköisyydellä saadaan funktio, jolla on nollakohta -1?

108. Pelaaja pelaa korttipeliä (ventti), jossa pyritään saamaan kortit, joiden arvojen summa on 21. Pelissä ässän arvo voi olla 1 ja 14. Muiden kuvakorttien arvot ovat 11, 12 ja 13. Hän vetää pakasta kaksi korttia.
a) Millä todennäköisyydellä ensimmäisen kortin arvo on 14 ja toisen kortin arvo 7.
b) Millä todennäköisyydellä korttien arvojen summa on 21?

Järjestysten lukumäärä

Ongelma Yhdeksänjäseniselle pesäpallojoukkueelle laaditaan lyöntijärjestys valitsemalla ensimmäinen lyöjä, toinen lyöjä jne. Kuinka monta erilaista lyöntijärjestystä joukkueelle voidaan laatia?

JOHDANTOESIMERKKI 1

Suunnistusseuran edustusryhmässä on kymmenen suunnistajaa. Edustusryhmälle laaditaan juoksujärjestys Tiomila-viestin kymmenelle osuudelle. Kuinka monta erilaista juoksujärjestystä voidaan laatia?

Ratkaisu Valitaan juoksijat Tiomila-viestin osuuksille.

1. juoksija	10 vaihtoehtoa
2. juoksija	9 vaihtoehtoa
3. juoksija	8 vaihtoehtoa
4. juoksija	7 vaihtoehtoa
5. juoksija	6 vaihtoehtoa
6. juoksija	5 vaihtoehtoa
7. juoksija	4 vaihtoehtoa
8. juoksija	3 vaihtoehtoa
9. juoksija	2 vaihtoehtoa
10. juoksija	1 vaihtoehto

Tuloperiaatteen nojalla erilaisten juoksujärjestysten lukumäärä on

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800.$$

Vastaus 3 628 800

Kertoma

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Kaikkien kokonaislukujen n, $n-1$, ... , 2 ja 1 tuloa kutsutaan luvun n *kertomaksi*.
Luvun n kertoma merkitään $n!$.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Yleistetään johdantoesimerkin 1 päättely ja lasketaan, kuinka monella tavalla n alkion joukon alkiot voidaan asettaa järjestykseen.

valitaan ensimmäinen	n	vaihtoehtoa
valitaan toinen	$n-1$	vaihtoehtoa
...	...	
valitaan viimeistä edellinen	2	vaihtoehtoa
valitaan viimeinen	1	vaihtoehto

Tuloperiaatteen nojalla järjestysten lukumäärä on

$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

n alkion joukon järjestysten lukumäärä

Jos joukossa on n alkiota, joukon alkiot voidaan järjestää jonoon $n!$ eri tavalla.

Joukon järjestyksiä kutsutaan kutsutaan joukon *permutaatioiksi*.
n alkion joukolla on siis $n!$ permutaatiota.

Kolmen alkion joukon $\{a, b, c\}$ permutaatiot ovat
abc, acb, bac, bca, cab ja cba.
Permutaatioiden lukumäärä on $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Luvun 0 kertoma

Luvun 0 kertoman arvoksi määritellään 1.

$$0! = 1$$

Perustelu määritelmälle on, että joukolla, jossa on nolla alkiota (tyhjä joukko), on vain yksi järjestys.

Luvun n kertoman $n!$ arvo voidaan laskea laskimen näppäimellä [!] tai [n!].

ESIMERKKI 2

Seitsenjäsenisessä suunnistusviestijoukkueessa on kolme poikaa ja neljä tyttöä. Joukkueen suunnistusjärjestys valitaan arpomalla. Millä todennäköisyydellä kolme ensimmäistä osuutta tulevat pojille ja neljä viimeistä tytöille?

Ratkaisu

Valitaan alkeistapauksiksi kaikki seitsenjäsenisen joukon järjestykset. Alkeistapausten lukumäärä on $7! = 5\,040$. Kaikki alkeistapaukset ovat yhtä mahdollisia.

Suotuisia alkeistapauksia ovat ne järjestykset, joissa pojat on järjestetty kolmelle ensimmäiselle paikalle ja tytöt neljälle viimeiselle paikalle. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä päätellään vaiheittain:

1. juoksija	3 vaihtoehtoa	(poika)
2. juoksija	2 vaihtoehtoa	(poika)
3. juoksija	1 vaihtoehto	(poika)
4. juoksija	4 vaihtoehtoa	(tyttö)
5. juoksija	3 vaihtoehtoa	(tyttö)
6. juoksija	2 vaihtoehtoa	(tyttö)
7. juoksija	1 vaihtoehto	(tyttö)

Tuloperiaatteen nojalla suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \cdot 4!$.

$$P(\text{pojat alussa ja tytöt lopussa}) = \frac{3! \cdot 4!}{7!} \approx 0{,}029$$

Vastaus

0,029

JOHDANTOESIMERKKI 3

Suunnistusseuran edustusryhmässä on kymmenen suunnistajaa. Edustusryhmästä valitaan suunnistaja seitsemänosuuksisen Jukolan viestin jokaiselle osuudelle. Kuinka monella eri tavalla viestijoukkue voidaan muodostaa?

Ratkaisu

Valitaan juoksijat viestin seitsemälle osuudelle.

1. juoksija	10 vaihtoehtoa
2. juoksija	9 vaihtoehtoa
3. juoksija	8 vaihtoehtoa
4. juoksija	7 vaihtoehtoa
5. juoksija	6 vaihtoehtoa
6. juoksija	5 vaihtoehtoa
7. juoksija	4 vaihtoehtoa

Tuloperiaatteen nojalla erilaisten joukkueiden lukumäärä on

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604\,800.$

Kun lauseke $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ lavennetaan tulolla $3 \cdot 2 \cdot 1$, saadaan:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{3!}.$$

Lausekkeen arvo voidaan siis laskea kahden kertoman osamääränä.

Vastaus

604 800

Jonojen lukumäärä

Kun n alkion joukosta valitaan k alkion jono ilman takaisinpanoa, niin erilaisten mahdollisten jonojen lukumäärä on tuloperiaatteen nojalla

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}_{k \text{ tekijää}}.$$

Tulossa on k:n peräkkäisen kokonaisluvun tulo laskettuna luvusta n alaspäin.

Tulon $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$ arvo voidaan laskea kertoman avulla:

Esimerkiksi $34 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 23 \cdot 22 = \dfrac{34!}{21!} \approx 5{,}78 \cdot 10^{18}$.

Laventamalla lauseke $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$ luvun $n-k$ kertomalla $(n-k)!$ saadaan yleisesti:*

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Tulon arvo voidaan laskea myös laskimen näppäimellä nPr.

Esimerkiksi tulo $\overbrace{34 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 23 \cdot 22}^{13 \text{ tekijää}}$ lasketaan näppäilemällä 34 nPr 13.

---

* n alkion joukon alkioista muodostettuja k alkion jonoja kutsutaan joskus joukon *k-variaatioiksi* tai *k-permutaatioiksi* ja niiden lukumäärää merkitään $(n)_k$. Siis

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

109. Kuinka monella tavalla voivat asettua jonoon
a) kolme pientä porsasta
b) neljä evankelistaa
c) seitsemän veljestä
d) Jaakobin 12 poikaa
e) valtioneuvoston 18 jäsentä?

110. Koulun yhdeksän luokkaa tulevat joka päivä eri järjestyksessä ruokailuun. Kuinka monen lukuvuoden kuluttua kaikki järjestykset on käyty läpi? Lukuvuodessa on 190 koulupäivää.

111. Väinö Linnan kootuissa teoksissa on osat 1–6. Pikkulapsi sijoittaa kirjat vierekkäin kirjahyllyyn. Millä todennäköisyydellä kirjat tulevat oikeaan järjestykseen?

112. Viisi sisarusta (ei kaksosia) arvotaan jonoon. Millä todennäköisyydellä sisarukset ovat jonossa jommassakummassa ikäjärjestyksessä?

113. Kuinka monella tavalla voivat seitsemän veljestä asettua jonoon, jossa
a) Juhani on ensimmäisenä
b) Simeoni neljäntenä
c) Juhani on ensimmäisenä ja Simeoni neljäntenä?

114. Sukkulaviestissä on kymmenen osuutta. Ensimmäisen osuuden juoksee tyttö ja muut vuorotellen poika ja tyttö. Kuinka monta erilaista juoksujärjestystä viestiin valitulle joukkueelle voidaan laatia?

115. Kuusi tyttöä ja neljä poikaa arvotaan jonoon. Millä todennäköisyydellä pojat jäävät jonon viimeisiksi?

116. Koulun 52 opettajan joukosta on valittava yhdeksänjäseninen pesäpallojoukkue, jolle on myös suunniteltava lyöntijärjestys. Kuinka monta (lyöntijärjestyksineen) erilaista joukkuetta voidaan valita?

117. Laske peräkkäisten kokonaislukujen tulo $50 \cdot 49 \cdot \ldots \cdot 37 \cdot 36$ kahden kertoman osamääränä.

118. Kuinka monta erilaista istumajärjestystä voidaan laatia 18 oppilaan ryhmälle luokassa, jossa on a) 18 b) 32 pulpettia?

119. Myyjäisten arpajaisissa on jäljellä 50 arpaa, joista neljä on voittoarpoja. Millä todennäköisyydellä kymmenestä ostetusta arvasta ainakin yksi on voittoarpa?

120. Vieraiden sijoittaminen pöytään arvokkailla päivällisillä on hyvin monimutkainen ongelma. Joudutaan harkitsemaan, kuka istuu kenen oikealla puolella, kuka vasemmalla puolella, kuka vastapäätä jne. Ongelma tulee vielä monimutkaisemmaksi, jos otetaan huomioon vieraiden sijainti huoneessa: kenellä on selkä oveen jne.
a) Kuinka monella eri tavalla kahdeksan henkeä voidaan sijoittaa pyöreään päivällispöytään, jos otetaan huomioon vain heidän sijaintinsa toisiinsa nähden?
b) Jos edellisessä kahdeksan hengen päivällisseurueessa on yhtä monta miestä ja naista ja samaa sukupuolta olevia ei haluta sijoittaa vierekkäin, niin kuinka monta sijoittamistapaa nyt on?

121. Tietokoneella kirjoitetaan 29 aakkosta järjestettyinä kaikkiin eri järjestyksiin.
a) Kirjoitin kirjoittaa neljä järjestystä sekunnissa. Kuinka monta vuotta kaikkien aakkosjärjestysten kirjoittaminen kestää?
b) Yhdelle arkille mahtuu allekkain kirjoitettuna 62 aakkosjärjestystä. Kuinka monen kilometrin korkuinen pino paperia kuluu kaikkien järjestysten kirjoittamiseen? Tuhannen arkin paperipinkan paksuus on 12 cm.

SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

122. Kuinka monella tavalla voivat asettua jonoon
a) Suomen evankelisluterilaisen kirkon kymmenen piispaa
b) EU-maiden 27 valtionvarainministeriä?

123. Kuinka monessa eri järjestyksessä korttipakan kortit voivat olla sekoittamisen jälkeen?

124. Tiedetään, että salakirjoituksen avaimena on kokonaislukujen 1–20 eräs järjestys. Tehokas tietokone pystyy kokeilemaan miljoona järjestystä sekunnissa. Kuinka monta vuotta salakirjoituksen murtaminen saattaa pahimmillaan kestää, vaikka kokeilu jatkuisi tauotta?

125. Juhlien loppuessa kaikki viisi vierasta valitsevat umpimähkään hatun hyllyltä, jolla ei ole muiden hattuja. Millä todennäköisyydellä joku saa väärän hatun?

126. Seitsemän Pientä Kääpiötä osallistuu Jukolan viestiin. Suunnistusjärjestys arvotaan. Millä todennäköisyydellä toinen kahdesta viimeisestä osuudesta tulee Nuhanenälle ja toinen Viisaalle?

127. Viidelle kilpailijalle, joista kaksi on suomalaista ja kolme ruotsalaista, määrätään lähtöjärjestys arpomalla. Millä todennäköisyydellä
a) saman maan edustajat lähtevät kaikki peräkkäin
b) ketkään kaksi saman maan edustajaa eivät lähde peräkkäin?

128. Ravilähdössä, jossa on 16 hevosta, on veikattava kolme ensimmäistä maalin tulevaa hevosta oikeassa järjestyksessä. Millä todennäköisyydellä umpimähkäinen veikkaus osuu oikeaan?

129. Kilpailuun ilmoittautuneista 37 haluk-kaasta vain 30 mahtuu kilpailuun. Mukaan pääsijät valitaan arvalla ja samalla arvotaan myös lähtöjärjestys. Kuinka monta erilaista lähtöluetteloa on mahdollista tulla?

130. Millä todennäköisyydellä pelaajalle jaetuista 13 kortista ainakin yksi on ässä?

131. Opetusryhmän kaikki jäsenet ovat syntyneet vuonna 1991. Kuinka suuri opetusryhmän tulee vähintään olla, jotta todennäköisyys, että ainakin kaksi on syntynyt samana päivänä, olisi suurempi kuin 0,5? Ratkaise ongelma systemaattisella kokeilulla.

132. Edellisen tehtävän tulosta voidaan ehkä pitää odottamattoman pienenä, joten tulosta kutsutaan usein *syntymäpäiväparadoksiksi*. Monilla sovellusaloilla on tärkeä seuraava syntymäpäiväparadoksin yleistys: Oletetaan, että erilaisia ominaisuuksia tms. on n erilaista ja jokaisen henkilön tms. kyseinen ominaisuus määräytyy satunnaisesti niin, että kaikki ominaisuudet ovat yhtä todennäköisiä. Kysytään, kuinka suuri ryhmän tulee vähintään olla, jotta todennäköisyys, että ainakin kahdella on sama ominaisuus, olisi suurempi kuin 0,5. Osoittautuu, että ryhmän pienin koko on likimain suoraan verrannollinen ominaisuuksien lukumäärän n neliöjuureen. Käytä seuraavissa ongelmissa hyväksi suoraan verrannollisuutta ja edellisen tehtävän tulosta.

a) Pankkikorttitunnukset muodostuvat neljästä numerosta 0–9. Numerosarjat, jossa kaikki numerot ovat samoja, eivät kuitenkaan ole käytössä. Kuinka suuri ryhmän tulee vähintään olla, jotta todennäköisyys, että ainakin kahdella on sama pankkikorttitunnus, olisi suurempi kuin 0,5?

b) Jokaiselle yrityksen työntekijälle arvotaan yrityksen tietokoneverkon kuuden merkin pituinen salasana, joka muodostuu aakkosten eiskandinaavisista kirjaimista (26 kappaletta) joko isoina tai pieninä ja numeroista 0–9. Kuinka monen työntekijän yrityksessä todennäköisyys, että ainakin kahdella on sama salasana, on suurempi kuin 0,5?

133. Kuinka moneen nollaan luku päättyy?

a) 32! b) 101!

134. Osoita, että 19 peräkkäisestä luonnollisesta luvusta

$20! + 2,\ 20! + 3,\ \ldots\ , 20! + 20$

mikään ei ole alkuluku.

Osoita edelleen, että jos n on mikä tahansa positiivinen kokonaisluku, niin on olemassa n peräkkäistä luonnollista lukua, joista yksikään ei ole alkuluku. Anna esimerkki tällaisista luvuista, kun

a) $n = 7$ b) $n = 1\,000\,000$.

Alkuluvut ovat ykköstä suurempia luonnollisia lukuja, jotka ovat jaollisia vain itsellään ja luvulla yksi.

Osajoukkojen lukumäärä

Ongelma

Ravilähdössä, jossa on viisi hevosta, on arvattava kolme ensimmäistä maaliin tulijaa.

a) Kuinka monta erilaista arvausta voidaan kaikkiaan tehdä, jos on arvattava myös maaliintulojärjestys? Kuinka monta arvausta jää Einolle, joka on varma siitä, että kolmena ensimmäisenä tulevat Karamelli, Liito-Kiito ja Menotar jossain järjestyksessä?

b) Kuinka monta arvausta voidaan kaikkiaan tehdä, jos maaliintulojärjestyksellä ei ole merkitystä?

Lähtö numero 11, suomenhevoset, ryhmäajo 2 100 m

Lähtöluettelo

1. Liito-Kiito
3. Menotar
4. Nopsan tyttö
5. Jarru-Poika
7. Karamelli

Poissa hevoset 2, 6 ja 8.

JOHDANTOESIMERKKI 1

Seitsemän veljeksen joukosta valitaan kolmijäseninen ryhmä edustamaan veljeksiä neuvottelussa. Kuinka monta mahdollista kokoonpanoa ryhmällä on?

Ratkaisu

Ajatellaan, että ryhmä muodostetaan seuraavasti: valitaan ryhmän jäsenet veljesten joukosta yksitellen peräkkäin ja sijoitetaan valitut jäsenet jonoon.

valitaan 1. jäsen 7 vaihtoehtoa
valitaan 2. jäsen 6 vaihtoehtoa
valitaan 3. jäsen 5 vaihtoehtoa

Joukosta, jossa on 7 jäsentä, voidaan muodostaa $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ erilaista kolmen jäsenen jonoa.

Eri jonot voivat kuitenkin muodostua samoista jäsenistä, sillä sama kokoonpano voi tulla valituksi useassa eri järjestyksessä.

> Jonot, jotka johtavat kokoonpanoon Aapo (A), Simeoni (S) ja Timo (T), ovat:
>
> AST ATS SAT STA TAS TSA
>
> Jonoissa Aapo, Simeoni ja Timo ovat kaikissa mahdollisissa eri järjestyksissä. Järjestysten lukumäärä on $3! = 6$.

Samasta kolmen jäsenen kokoonpanosta voidaan aina muodostaa $3! = 6$ erilaista jonoa. Jonojen lukumäärä on erilaisten kokoonpanojen lukumäärä kuusinkertaisena.

Erilaisten kokoonpanojen lukumäärä saadaan, kun kolmen jäsenen jonojen lukumäärä $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ jaetaan kolmen jäsenen joukon järjestysten lukumäärällä $3! = 6$. Erilaisia kokoonpanoja on

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \frac{210}{6} = 35.$$

Vastaus

35

Muodostetaan kaava, jonka avulla voidaan laskea n alkion joukon k-alkioisten osajoukkojen lukumäärä.

Valitaan ensin k alkiota yksitellen peräkkäin ja sijoitetaan alkiot jonoon. n alkion joukosta voidaan muodostaa

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

erilaista k alkion jonoa.

Eri jonot voivat kuitenkin muodostua samoista alkioista. Samasta k alkion osajoukosta voidaan muodostaa $k!$ erilaista jonoa. Osajoukkojen lukumäärä saadaan, kun k alkion jonojen lukumäärä

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

jaetaan k alkion joukon järjestysten lukumäärällä $k!$. Osajoukkojen lukumäärä on

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Saatua lauseketta merkitään $\binom{n}{k}$, ja se luetaan ”n yli k:n”.

Osajoukkojen lukumäärä

n alkion joukon k-alkioisten osajoukkojen lukumäärä on

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Keskimmäisen muodon osoittajassa on k:n peräkkäisen kokonaisluvun tulo, kun lasketaan luvusta n alaspäin.

Joukosta poimittuja k alkion osajoukkoja kutsutaan joskus joukon *k-kombinaatioiksi*. n alkion joukolla on siis $\binom{n}{k}$ erilaista k-kombinaatiota.

Lausekkeita $\binom{n}{k}$ kutsutaan *binomikertoimiksi*. Nimityksen tausta selviää luvussa Pascalin kolmio.

Monissa laskimissa on näppäin nCr, jonka avulla voidaan laskea binomikertoimen $\binom{n}{k}$ arvo.*

Esimerkiksi $\binom{30}{5}$ näppäillään 30 nCr 5.

Jos n ei ole suuri, niin binomikerroin $\binom{n}{k}$ voidaan laskea myös käyttäen binomikertoimen määritelmän jälkimmäistä muotoa ja laskimen kertomanäppäintä. Esimerkiksi

$$\binom{30}{5} = \frac{30!}{5!25!} = 142\,506.$$

Kertoman arvo tulee kuitenkin pian niin suureksi, että laskin ei pysty sitä laskemaan. Esimerkiksi luvun 600 kertomaa eivät enää useimmat laskimet laske, joten yritys laskea $\binom{600}{5}$ muodossa $\frac{600!}{5!\ 595!}$ tuottaa virheilmoituksen. Tällöin voidaan käyttää binomikertoimen määritelmän ensimmäistä muotoa:

$$\binom{600}{5} = \frac{600 \cdot 599 \cdot 598 \cdot 597 \cdot 596}{5!} \approx 6{,}4 \cdot 10^{11}.$$

---

* Laskimen näppäimen nCr merkintä on lyhennetty ”*n* Combination *r*”.
Vastaavasti näppäimen nPr merkintä on lyhennetty ”*n* Permutation *r*”.

ESIMERKKI 2

Oppilasryhmässä on 34 jäsentä. Oppilasryhmä valitsee keskuudestaan viisijäsenisen toimikunnan. Kuinka monta erilaista mahdollista kokoonpanoa toimikunnalla on?

Ratkaisu

34 jäsenen joukon viisijäsenisten osajoukkojen lukumäärän ilmaisee binomikerroin $\binom{34}{5}$.

Erilaisten toimikuntien lukumäärä on $\binom{34}{5} = 278\,256$.

Vastaus

278 256

ESIMERKKI 3

Lottoriviin arvotaan seitsemän lottonumeroa luvuista 1, 2, ... , 39.
a) Kuinka monta erilaista lottoriviä on?
Mikä on todennäköisyys saada lotossa yhdellä rivillä
b) 7 oikein c) ei yhtään oikein?

Ratkaisu

a) Jokainen lottorivi on 39 luvun joukon 7-alkioinen osajoukko. Erilaisten lottorivien lukumäärä on

$$\binom{39}{7} = 15\,380\,937.$$

b) Valitaan alkeistapauksiksi lottorivit. Vain yhdessä rivissä ovat kaikki lottonumerot samat kuin arvotussa lottorivissä, joten

$$\mathrm{P}(\text{7 oikein}) = \frac{1}{15\,380\,937} \approx 6{,}50 \cdot 10^{-8}.$$

c) Kun 39 luvun joukosta poistetaan oikean lottorivin 7 lukua, jäljelle jää 32 luvun joukko. Tapahtumalle ”ei yhtään oikein” suotuisia alkeistapauksia ovat ne lottorivit, joiden jokainen numero on valittu näiden 32 luvun joukosta. Lottorivejä, joissa ei ole yhtään numeroa oikein, on $\binom{32}{7}$ kappaletta.

$$\mathrm{P}(\text{ei yhtään oikein}) = \frac{\binom{32}{7}}{\binom{39}{7}} = \frac{3\,365\,856}{15\,380\,937} \approx 0{,}219$$

Vastaus

a) 15 380 937 b) $\frac{1}{15\,380\,937} \approx 6{,}50 \cdot 10^{-8}$ c) 0,219

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

135. Kahdentoista opetuslapsen joukosta valitaan nelijäseninen ryhmä edustamaan opetuslapsia neuvottelussa. Kuinka monta mahdollista kokoonpanoa ryhmällä on?

136. Kuinka monta erilaista viiden kortin ”kättä” korttipelissä on mahdollisuus saada?

137. Luokassa on 21 oppilasta, joista joka päivä kaksi on järjestäjinä. Onko mahdollista valita järjestäjät niin, että lukuvuoden (190 koulupäivää) aikana kukaan ei joudu kahta kertaa järjestäjäksi saman luokkatoverin kanssa?

138. Kun halutaan saada tietoa esimerkiksi jonkin joukon mielipiteistä ja koko joukon tutkiminen ei ole mahdollista, niin joukosta valitaan pienempi *otos*. Otanta pyritään suorittamaan niin, että otos edustaa koko perusjoukkoa. Usein otanta suoritetaan arpomalla.
a) Kuinka monta erilaista neljän hengen otosta on mahdollista valita 59 kyläläisen joukosta?
b) Kyläläisistä 29 kannattaa kyläkoulun lopettamista. Kuinka moni neljän hengen otoksista koostuu pelkistä koulun lopettamisen kannattajista?
c) Millä todennäköisyydellä arvalla valittu otos koostuu pelkistä lopettamisen kannattajista?

139. Viking-lotossa arvotaan kuusi lottonumeroa luvuista 1–48. Laske todennäköisyys, että yhdellä lottorivillä tulee
a) kuusi oikein
b) ei yhtään oikein
c) ainakin yksi oikein.

140. Tavallisessa lottorivissä on seitsemän lottonumeroa. On mahdollista pelata myös niin sanottuja lottojärjestelmiä merkitsemällä ruudukkoon enemmän kuin seitsemän numeroa. Kuinka monta erilaista seitsemän numeron lottoriviä sisältyy järjestelmään, jossa samaan ruudukkoon on merkitty a) 8 b) 9 c) 11 numeroa? Laske myös järjestelmien hinnat, kun yhden lottorivin hinta on 0,70 euroa (vuosi 2005).

141. Hotellissa on 24 huonetta, joista kolme on vapaana. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi huoneista 5, 6 ja 7 on vapaana? Oletetaan, että vieraat sijoitetaan huoneisiin satunnaisesti.

142. Motellissa on kahdeksan huonetta vierekkäin. Huoneet täytetään arpomalla. Millä todennäköisyydellä ystäväperheet Nieminen ja Virtanen pääsevät vierekkäisiin huoneisiin?

143. Lukiossa on 569 oppilasta. Heistä 565 mahtuu retkipäivänä linja-autoihin.
a) Kuinka monella tavalla koululle jäävät neljä oppilasta voidaan valita?
b) Kuinka monella tavalla retkelle pääsevät voidaan valita?

144. Kuinka monta leikkauspistettä voi yhteensä olla tasoon piirretyllä n suoralla? Sovella tulosta tapaukseen $n = 100$.

145. Kuinka monta lävistäjää on n-kulmiolla? Sovella tulosta tapaukseen $n = 30$.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

146. Kuinka monta
a) kahden pojan paria
b) pojan ja tytön paria
voidaan muodostaa ryhmästä, jossa on 17 poikaa ja 29 tyttöä?

147. Laske a) $\binom{14}{2}$ b) $\binom{200}{4}$.

Keksi kumpaankin kohtaan jokin käytännön ongelma, jonka ratkaisu saadaan kyseisellä lausekkeella.

148. Bridge-pelissä korttipakan 52 korttia jaetaan tasan neljän pelaajan kesken. Kuinka monta erilaista ”kättä” pelaajan on mahdollisuus saada?

149. Kaikki kutsujen vieraat kättelivät toisiaan, jolloin suoritettiin yhteensä 861 kättelyä. Kuinka monta vierasta kutsuilla oli?

150. Urheilujoukkueesta, jossa oli 48 jäsentä, valitaan arvalla viiden hengen otos, jolle tehdään perusteelliset tutkimukset kiellettyjen aineiden käytöstä.
a) Kuinka monta erilaista otosta on mahdollisuus saada?
b) Joukkueessa on neljä kiellettyjä aineita käyttänyttä. Millä todennäköisyydellä otos kuitenkin koostuu pelkästään puhtaista urheilijoista?

151. Vuosina 1981–1986 lottoriviin arvottiin seitsemän lottonumeroa luvuista 1–37. Kuinka monta erilaista lottoriviä tällöin oli? Mikä oli todennäköisyys saada yhdellä rivillä 7 oikein? Entä ei yhtään oikein? Miksi lottopeliä on muutettu?

152. Opettaja kertoo joka vuosi todennäköisyyslaskennan kurssilla kolme vitsiä. Kuinka monta vitsiä opettajan riittää osata, että hän 35 vuoden kuluessa voi joka vuosi kertoa erilaisen vitsikolmikon? Ratkaise systemaattisella kokeilulla.

153. Tavalliseen lottoriviin arvotaan seitsemän lottonumeroa luvuista 1–39. Pelaaja käyttää lottojärjestelmää merkitsemällä yhteen ruudukkoon 11 numeroa. Millä todennäköisyydellä hän
a) saa 7 oikein
b) ei saa yhtään oikein
c) saa ainakin yhden numeron oikein?

154. Loppukilpailun kahdeksalle juoksijalle arvotaan lähtöradat. Millä todennäköisyydellä kaikki kolme ennakkosuosikkia juoksevat vierekkäisillä radoilla?

155. Kaksitoista henkilöä arvotaan jonoon. Millä todennäköisyydellä kahden tietyn henkilön A ja B välissä on enintään yksi henkilö?

156. Käytä binomikertoimen muotoa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ ja laske

a) $\binom{n}{0}$ b) $\binom{n}{1}$

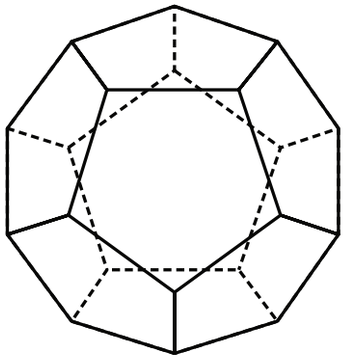
c) $\binom{n}{n-1}$ d) $\binom{n}{n}$.

Tulkitse ja perustele tulokset myös osajoukkojen lukumäärän avulla.

157. a) Osoita, että $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Tulkitse yhtäsuuruus myös osajoukkojen lukumäärien avulla.
b) Lukion 613 oppilaasta 610:lle on istumapaikat lukion juhlasalissa. Oppilaiden joukosta valitaan saliin pääsevät. Mitä a-kohdan kaava tässä tilanteessa tarkoittaa?

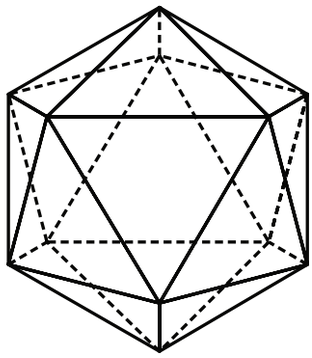
158. Laske kappaleen avaruuslävistäjien lukumäärä.

a)



säännöllinen 12-tahokas (dodekaedri)

b)



säännöllinen 20-tahokas (ikosaedri)

159. Tasoon on merkitty n pistettä ($n \geqslant 2$), joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Pistejoukon jokaisen kahden pisteen kautta piirretään suora.

a) Kuinka monta suoraa saadaan?

b) Kuinka monta leikkauspistettä suorilla voi olla merkittyjen n pisteen lisäksi? Sovella tuloksia tapaukseen $n = 30$.

160. Joukolle, jossa on n alkiota, valitaan osajoukko tekemällä jokaisen alkion kohdalla valinta: osajoukkoon vai ei.

a) Kuinka monessa vaiheessa osajoukko valitaan, ja kuinka monta vaihtoehtoa jokaisessa vaiheessa on?

b) Päättele tuloperiaatteen avulla n alkion joukon kaikkien osajoukkojen (mukaan luettuna tyhjä joukko ja joukko itse) lukumäärä.

Pascalin kolmio

Lukujen $\binom{n}{k}$ kutsuminen binomikertoimiksi johtuu siitä, että luvut esiintyvät kertoimina binomin (summan) potenssissa $(a+b)^n$. Luvut $\binom{n}{k}$ muodostavat niin sanotun *Pascalin kolmion*, josta voidaan suoraan lukea potenssin $(a+b)^n$ kertoimet.

Vieressä on osa Pascalin* kolmiosta.

Ylinnä on $(a+b)^0 = 1$.

Toisella rivillä ovat potenssin $(a+b)^1 = a+b$ kertoimet 1 ja 1.

Kolmannella rivillä ovat summan neliön $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kertoimet 1, 2 ja 1.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Edelleen esimerkiksi kuudennelta riviltä nähdään, että

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Siis silloin, kun termit on järjestetty a:n laskevien (b:n nousevien) potenssien mukaan, kertoimet voidaan suoraan lukea Pascalin kolmiosta.

Esimerkki 1. Laske $(x-3)^5$.

Ratkaisu. Lauseke voidaan kirjoittaa muotoon $(x+(-3))^5$. Termit järjestetään muuttujan x laskevien (luvun -3 nousevien) potenssien mukaan ja kertoimet luetaan Pascalin kolmion kuudennelta vaakariviltä.

$$\begin{aligned}(x+(-3))^5 &= x^5 + 5x^4 \cdot (-3) + 10x^3 \cdot (-3)^2 + 10x^2 \cdot (-3)^3 + 5x \cdot (-3)^4 + (-3)^5 \\ &= x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243\end{aligned}$$

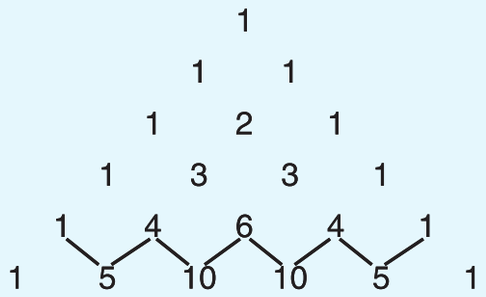
Vastaus. $x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$

* Blaise Pascal, 1623–1662, ranskalainen matemaatikko, filosofi ja kirjailija. Jo ennen Pascalia oli tunnettua, että binomin potenssien kertoimet muodostavat kuvatunlaisen kolmion. Pascal oivalsi kolmion lukujen ilmaisevan myös osajoukkojen lukumääriä ja käytti lukuja todennäköisyyksien laskemiseen.

161. Laske a) $(x+5)^4$ b) $(x-1)^6$.

162. Laske $(3x-1)^5$.

Pascalin kolmio muodostetaan niin, että aina uuden rivin ensimmäinen ja viimeinen luku on 1 ja jokainen muu luku on kahden yläpuolella olevan luvun summa. Esimerkiksi kuudes rivi alkaa luvulla 1, seuraavaksi on $1+4=5$, $4+6=10$, $6+4=10$ jne. Selitys tälle on, että juuri näin muodostuvat potenssin $(a+b)^5$ kertoimet edellisen potenssin $(a+b)^4$ kertoimista, kun $(a+b)^5$ lasketaan kertomalla edellinen potenssi $(a+b)$:llä:



$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4$$

$$= (a+b)(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)$$

$$= \underbrace{a \cdot a^4}_{\text{I}} + \underbrace{b \cdot a^4 + a \cdot 4a^3b}_{\text{II + III}} + \underbrace{b \cdot 4a^3b + a \cdot 6a^2b^2}_{\text{IV + V}} + \ldots$$

$$= a^5 + (1+4)a^4b + (4+6)a^3b^2 + \ldots$$

Kerrotaan jälkimmäisen tekijän ensimmäinen termi ensin a:lla ja sitten b:llä, toinen termi ensin a:lla ja sitten b:llä jne.

163. Muodosta Pascalin kolmion yhdeksäs ja kymmenes vaakarivi.

Pascalin kolmiossa esiintyvät luvut ovat kaikki binomikertoimia $\binom{n}{k}$.

Esimerkiksi potenssin $(a+b)^5$ kertoimet ovat

$$\binom{5}{5} = 1, \quad \binom{5}{4} = 5, \quad \binom{5}{3} = 10, \quad \binom{5}{2} = 10, \quad \binom{5}{1} = 5 \quad \text{ja} \quad \binom{5}{0} = 1,$$

eli

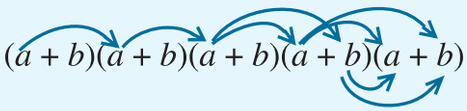
$$(a+b)^5 = \binom{5}{5}a^5 + \binom{5}{4}a^4b + \binom{5}{3}a^3b^2 + \binom{5}{2}a^2b^3 + \binom{5}{1}ab^4 + \binom{5}{0}b^5.$$

Syy tähän havainnollistuu, kun lasketaan potenssi $(a+b)^5$ viiden tekijän tulona:

$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$.

Osoitetaan esimerkiksi, että tulossa on termi $\binom{5}{3}a^3b^2$.

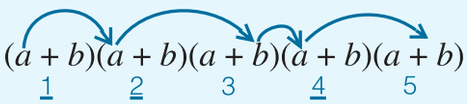
Osittelulain perusteella tulo lasketaan niin, että lasketaan vasemmalta oikealle kulkemalla kaikki viiden tekijän tulot.



Aloittamalla merkityistä nuolista saadaan

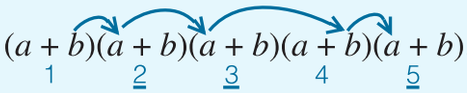
$a^5 + aaaab + aaaba + aaabb + \ldots$.

a^3b^2 saadaan aina silloin, kun kolmesta tekijästä $a+b$ on valittu a ja kahdesta b. Esimerkiksi



Tekijät on numeroitu 1, 2, 3, 4 ja 5.
Tekijöistä 1, 2 ja 4 on valittu a.
Saadaan $aabab = a^3b^2$.

ja



Tekijöistä 2, 3 ja 5 on valittu a.
Saadaan $baaba = a^3b^2$.

Ne kolme tekijää $a+b$, joista valitaan a, voidaan valita viiden tekijän joukosta $\binom{5}{3}$ eri tavalla.

Tulon a^3b^2 kertoimeksi tulee $\binom{5}{3} = 10$.

Pascalin kolmio voidaan siis kirjoittaa binomikertoimien avulla.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{1} & & \binom{1}{0} & & \\
 & \binom{2}{2} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{0} & \\
\binom{3}{3} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{0}
\end{array}$$

Kolmion $(n + 1)$:nnen vaakarivin luvut ovat binomikertoimet $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{n-1}$, ... , $\binom{n}{1}$ ja $\binom{n}{0}$.

Näin saadaan binomin potenssille niin sanottu binomikaava.

Binomikaava

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n-2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + b^n$$

Kaavaan on valmiiksi laskettu $\binom{n}{n} = 1$ ja $\binom{n}{0} = 1$.

Esimerkki 2. Mikä on polynomin $(x + 7)^{12}$ kahdeksannen asteen termi?

Ratkaisu. Voitaisiin laskea lisää Pascalin kolmion rivejä aina 13. riviin saakka. Yksinkertaisempaa on käyttää binomikaavaa. Kaavan mukaan polynomin $(x + 7)^{12}$ kahdeksannen asteen termi on

$$\binom{12}{8} \cdot x^8 \cdot 7^4 = 495 \cdot x^8 \cdot 2401 = 1\,188\,495x^8.$$

Vastaus. $1\,188\,495x^8$

164. Laske polynomin $(x + 1)^{50}$ 47. asteen ja toisen asteen termit.

165. Laske polynomin $(x - 3)^{13}$ yhdennentoista ja neljännen asteen termit sekä vakiotermi.

166. Laske polynomin $(3x + 2)^{14}$ kymmenennen ja kolmannen asteen termit.

167. Koska jokainen Pascalin kolmion luku (laidoilla olevia ykkösiä lukuun ottamatta) on kahden yläpuolella olevan luvun summa, niin pätee $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Perustele kaava kahdella muulla tavalla:
a) laskemalla käyttäen binomikertoimien määritelmää
b) tulkitsemalla binomikertoimet osajoukkojen lukumääriksi.

168. Laske summa

$$\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} + \ldots + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$$

n:n arvoilla 1, 2 ja 3. Summan voi laskea suoraan Pascalin kolmion vaakariveiltä. Keksi summan arvolle kaava ja perustele se yleisesti binomikaavan avulla.

169. Käytä hyväksi edellistä tehtävää ja päättele, kuinka monta osajoukkoa (mukaan luettuna tyhjä joukko ja joukko itse) on joukolla, jossa on n alkiota.

Todennäköisyyksiä kombinatoriikan avulla

Kombinatoriikka tarkoittaa äärellisten joukkojen tutkimista, muun muassa menetelmiä laskea äärellisestä joukosta poimittujen erilaisten yhdistelmien kuten jonojen ja osajoukkojen lukumääriä. Tässä kuten edellisissä luvuissa käytetään kombinatoriikan menetelmiä alkeistapausten laskemiseen.

Seuraavan esimerkin a-kohta havainnollistaa, kuinka sama ongelma voidaan usein ratkaista eri menetelmillä.

ESIMERKKI 1

Kunnanvaltuustossa on 15 naista ja 10 miestä. Valtuustosta valitaan arvalla viisijäseninen toimikunta. Millä todennäköisyydellä toimikuntaan tulee a) pelkästään naisia b) 3 naista ja 2 miestä?

Ratkaisu

a) *Tapa 1.* Ajatellaan toimikunnan jäsenet valittaviksi peräkkäin yksitellen ja valitaan alkeistapauksiksi 25 valtuutetun joukosta muodostetut viiden valtuutetun jonot.

Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$.

Tapahtumalle ”pelkästään naisia” suotuisia alkeistapauksia ovat 15 naisvaltuutetun joukosta muodostetut viiden valtuutetun jonot. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11$.

$$\text{P(pelkästään naisia)} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21} \approx 0{,}057$$

Tapa 2. Valitaan alkeistapauksiksi 25 valtuutetun joukosta valitut viiden valtuutetun osajoukot. Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $\binom{25}{5}$.

Tapahtumalle ”pelkästään naisia” suotuisia alkeistapauksia ovat 15 naisvaltuutetun joukosta valitut viiden valtuutetun osajoukot. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{15}{5}$.

$$\text{P(pelkästään naisia)} = \frac{\binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} = \frac{3\,003}{53\,130} \approx 0{,}057$$

b) Jos valitaan alkeistapauksiksi 25 valtuutetun joukosta valitut viiden valtuutetun jonot (a-kohdan tapa 1), niin tapahtumalle ”kolme naista ja kaksi miestä” suotuisia ovat kaikki ne jonot, joissa on jossain järjestyksessä kolme naisvaltuutettua ja kaksi miesvaltuutettua.* Jotta vältytään eri järjestysvaihtoehtojen läpikäymiseltä, valitaan alkeistapauksiksi 25 valtuutetun joukosta valitut viiden valtuutetun osajoukot (a-kohdan tapa 2).

Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $\binom{25}{5}$.

Tapahtumalle ”kolme naista ja kaksi miestä” suotuisia ovat ne 25 valtuutetun joukosta valitut viiden valtuutetun osajoukot, joissa on kolme naista ja kaksi miestä. Valitaan osajoukkoon ensin naisjäsenet ja sitten miesjäsenet.

valitaan 3 naista 15 naisen joukosta: $\binom{15}{3}$ vaihtoehtoa

valitaan 2 miestä 10 miehen joukosta: $\binom{10}{2}$ vaihtoehtoa

---

* Esimerkiksi jono NNNMM, joita on $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 10 \cdot 9$ erilaista, jono NNMNM, joita on $15 \cdot 14 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 9$ erilaista jne.

Tuloperiaatteen nojalla kolmen naisen ja kahden miehen osajoukkoja on $\binom{15}{3} \cdot \binom{10}{2}$.

$$\text{P(3 naista ja 2 miestä)} = \frac{\binom{15}{3}\binom{10}{2}}{\binom{25}{5}} = \frac{20\,475}{53\,130} \approx 0{,}39$$

Vastaus a) 0,057 b) 0,39

Perusjoukon valitseminen

Useissa tilanteissa on kaksi vaihtoehtoista tapaa valita satunnaisilmiön perusjoukko: alkeistapauksiksi voidaan valita (järjestetyt) jonot tai alkeistapauksiksi voidaan valita (järjestämättömät) osajoukot. Valinta saattaa vaikuttaa alkeistapausten lukumäärän laskemisen monimutkaisuuteen.

Edellä esimerkin 1 a-kohdassa kumpikin valinta johti yksinkertaisiin laskuihin. b-kohdassa kannatti valita alkeistapauksiksi osajoukot. Joskus taas jonojen valitseminen alkeistapauksiksi johtaa helpompiin laskuihin (katso esimerkiksi tehtävä 178).

ESIMERKKI 2

Rasiassa on kymmenen kananmunaa, joista kuusi on tuoretta ja neljä pilaantunutta. Munakkaaseen rikotaan kolme kananmunaa. Olkoon satunnaismuuttuja X munakkaaseen joutuvien pilaantuneiden munien lukumäärä. Määritä satunnaismuuttujan X jakauma ja odotusarvo.

Ratkaisu

Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat 0, 1, 2 ja 3. Lasketaan jokaisen arvon todennäköisyys.

Valitaan alkeistapauksiksi 10 munan joukon kolmen munan osajoukot.* Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $\binom{10}{3}$.

Tapahtumalle $X = 0$ suotuisia ovat ne alkeistapaukset, joissa kaikki kolme munaa on valittu kuuden tuoreen munan joukosta. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{6}{3}$ ja

$$\mathrm{P}(X = 0) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17.$$

Tapahtumalle $X = 1$ suotuisia ovat ne alkeistapaukset, joissa kaksi munaa on valittu kuuden tuoreen munan joukosta ja yksi muna neljän pilaantuneen joukosta.

valitaan 2 munaa 6 tuoreesta: $\binom{6}{2}$ vaihtoehtoa

valitaan 1 muna 4 pilaantuneesta: $\binom{4}{1}$ vaihtoehtoa

Tuloperiaatteen nojalla suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1}$, joten

---

* Todennäköisyydet $\mathrm{P}(X = 0)$ ja $\mathrm{P}(X = 3)$ voitaisiin laskea myös valitsemalla alkeistapauksiksi kolmen munan jonot.

$$P(X=1)=\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{15\cdot 4}{120}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Tapahtumalle $X=2$ suotuisia ovat ne alkeistapaukset, joissa yksi muna on valittu kuuden tuoreen munan joukosta ja kaksi munaa neljän pilaantuneen munan joukosta. Tuloperiaatteen nojalla suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{2}$, joten

$$P(X=2)=\frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{6\cdot 6}{120}=\frac{3}{10}=0{,}3.$$

Tapahtumalle $X=3$ suotuisia ovat ne alkeistapaukset, joissa kaikki kolme munaa on valittu neljän pilaantuneen joukosta. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{4}{3}$ ja

$$P(X=3)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}\approx 0{,}033.$$

Satunnaismuuttujan X odotusarvo lasketaan kertomalla muuttujan jokainen mahdollinen arvo todennäköisyydellään ja laskemalla tulot yhteen.

$$E(X)=\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{3}{10}\cdot 2+\frac{1}{30}\cdot 3=1{,}2$$

Vastaus

$P(X=0)=\frac{1}{6}$, $P(X=1)=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{3}{10}$, $P(X=3)=\frac{1}{30}$

$E(X)=1{,}2$ kananmunaa

ESIMERKKI 3

Viking-loton riviin arvotaan kuusi lottonumeroa luvuista 1–48. Lisäksi arvotaan kaksi lisänumeroa. Pelaaja käyttää lottojärjestelmää merkitsemällä samaan ruudukkoon kymmenen numeroa. Millä todennäköisyydellä järjestelmässä on oikein viisi numeroa ja toinen lisänumero?

Ratkaisu

Valitaan alkeistapauksiksi lottonumeroiden joukon 10 numeron osajoukot. Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $\binom{48}{10}$. Tapahtumalle ”viisi ja toinen lisänumero oikein” suotuisia ovat ne 10 numeron joukot joissa on

viisi numeroa oikean lottorivin kuuden numeron joukosta,
yksi numero kahden lisänumeron joukosta
ja neljä numeroa muiden 40 numeron joukosta

Tuloperiaatteen nojalla suotuisten alkeistapausten lukumäärä on

$$\binom{6}{5} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{40}{4}.$$

$$\text{P(viisi ja toinen lisänumero oikein)} = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{40}{4}}{\binom{48}{10}} \approx 0{,}000168$$

Vastaus

0,000168

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

170. Korissa on 15 pulloa kevytjuomaa ja 9 pulloa tavallista juomaa. Kori on ollut järvessä jäähtymässä, ja etiketit ovat irronneet. Koristä otetaan umpimähkään viisi pulloa. Laske kahdella tavalla todennäköisyys, että saadaan pelkkää kevytjuomaa. Käytä alkeistapauksina
a) viiden pullon jonoja
b) viiden pullon osajoukkoja.

171. Laske todennäköisyys, että edellisen tehtävän viidestä pullosta kolme on kevytjuomaa ja kaksi tavallista juomaa.

172. Pelaajalle jaetaan tavallisesta korttipakasta kolme korttia. Millä todennäköisyydellä
a) kortit ovat kaikki eri maata
b) saadaan ainakin kaksi keskenään samaa maata olevaa korttia?

173. Myyjäisten arpajaisissa on jäljellä 15 arpaa, joista kuusi on voittoarpoja. Pekka ostaa kolme arpaa. Olkoon satunnaismuuttuja X voittoarpojen lukumäärä. Määritä satunnaismuuttujan X jakauma ja odotusarvo.

174. Valitaan toimikunta, johon tulee kaksi opettajaa opetusryhmää opettavasta 12 opettajasta, neljä tyttöä ryhmän 17 tytöstä ja kolme poikaa ryhmän 13 pojasta. Kuinka monta erilaista toimikuntaa voidaan valita?

175. Maljassa on 3 valkoista, 4 punaista ja 5 mustaa palloa. Maljasta nostetaan kolme palloa. Millä todennäköisyydellä pallot ovat kaikki erivärisiä?

176. Lottoriviin arvotaan 7 lottonumeroa 39 numerosta. Lisäksi arvotaan kolme lisänumeroa. Loton voittoluokat ovat:
7 oikein
6 oikein ja lisänumero
6 oikein
5 oikein
4 oikein
Sivun 61 esimerkissä 3 on laskettu todennäköisyys saada yhdellä lottorivillä 7 oikein ($6{,}50 \cdot 10^{-8}$). Laske muiden voittojen todennäköisyydet.

177. Viking-loton riviin arvotaan kuusi lottonumeroa luvuista 1–48. Lisäksi arvotaan kaksi lisänumeroa. Viking-loton toiseksi korkein voittoluokka on 5 ja lisänumero oikein. Pelaaja käyttää lottojärjestelmää merkitsemällä samaan ruudukkoon 11 numeroa. Millä todennäköisyydellä hän saa voiton 5 ja lisänumero oikein?

178. Pakasta vedetään kaksi korttia. Laske kahdella tavalla todennäköisyys, että saadaan pari (kaksi samanarvoista korttia). Valitse alkeistapauksiksi
a) kahden kortin jonot
b) kahden kortin osajoukot.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

179. Pakasta nostetaan viisi korttia. Millä todennäköisyydellä
a) kaikki kortit ovat herttoja
b) ainakin yksi kortti on hertta
c) kaksi korteista on herttoja?

180. Pakasta nostetaan viisi korttia. Millä todennäköisyydellä kaikki kortit ovat arvoltaan 2–10 ja lisäksi keskenään eriarvoiset?

181. Opetusryhmässä on 12 poikaa ja 15 tyttöä.
a) Ryhmästä muodostetaan lentopallojoukkue, johon valitaan kolme poikaa ja kolme tyttöä. Kuinka monta mahdollista kokoonpanoa lentopallojoukkueella on?
b) Jos joukkue valittaisiin kokonaan arpomalla, niin millä todennäköisyydellä siihen tulisi kolme poikaa ja kolme tyttöä?

182. Taskussa on kymmenen viiden Sveitsin frangin kolikkoa ja kahdeksan yhden frangin kolikkoa. Taskusta kaivetaan umpimähkään kolme kolikkoa palvelurahaksi. Olkoon satunnaismuuttuja X palvelurahan määrä. Määritä satunnaismuuttujan X jakauma ja odotusarvo.

183. Yhdistyksen 60 jäsenestä 30 kannattaa jäsenmaksun korottamista, 20 jäsenmaksun pitämistä ennallaan ja 10 jäsenmaksun alentamista. Millä todennäköisyydellä jäsenistön joukosta arvalla valitussa kuuden hengen johtokunnassa on kutakin mielipidettä samassa suhteessa kuin koko jäsenkunnassa?

184. Lottoriviin arvotaan 7 lottonumeroa 39 numerosta. Lisäksi arvotaan kolme lisänumeroa. Pelaaja käyttää lottojärjestelmää merkitsemällä yhteen ruudukkoon 10 numeroa. Millä todennäköisyydellä hän saa
a) 6 oikein (ei lisänumeroa)
b) 6 oikein ja lisänumeron?

185. Veikkauksen Keno-pelissä arvotaan 20 numeroa 70 numerosta. Pelaaja valitsee pelitason Keno-2:sta Keno-10:een, jolloin hän yrittää saada pelitason mukaisen määrän numeroita oikein. Jokaisella pelitasolla on oma voittoluokkansa ja voittokertoimensa. Voittokerroin ilmaisee, kuinka moninkertaisena pelaaja saa takaisin pelimaksunsa (0,50 euroa–10 euroa). Esimerkiksi Keno-3 ja Keno-6 pelien voittoluokat ja voittokertoimet ovat:

Keno-3

tulos	kerroin
3 oikein	18
2 oikein	1

Keno-6

tulos	kerroin
6 oikein	420
5 oikein	20
4 oikein	3
3 oikein	1

Pelaaja osallistuu Keno-peliin yhdellä rivillä ja maksaa yhden euron pelimaksun. Mikä on pelaajan takaisin saaman rahamäärän odotusarvo
a) Keno-3 -pelissä
b) Keno-6 -pelissä?

186. Korttipakan kortit jaetaan tasan neljälle pelaajalle. Millä todennäköisyydellä kortit jakautuvat maittain eli aina yksi maa yhdelle pelaajalle?

187. Pelaajalle jaetaan viisi pelikorttia. Millä todennäköisyydellä pelaaja saa
a) värisuoran, eli kortit ovat saman maan peräkkäisiä kortteja (ässä voi olla suorassa arvoltaan sekä 1 että 14.)
b) värin, eli kortit ovat samaa maata, mutta eivät peräkkäisiä
c) suoran, eli kortit ovat peräkkäisiä kortteja, mutta eivät kaikki samaa maata?

188. Pelaajalle jaetaan viisi pelikorttia. Millä todennäköisyydellä pelaaja saa
a) neloset (neljä samanarvoista korttia)
b) täyskäden (kolmoset ja pari)
c) kolmoset (kolme samanarvoista korttia, muut kortit eriarvoisia)
d) kaksi paria
e) parin (kaksi samanarvoista korttia, muut kortit eriarvoisia)?

189. Yhdistyksen n jäsenen joukosta valitaan johtokunta, jossa on k jäsentä ja jonka jäsenistä kaksi muodostaa johtoparin. Eri johtokuntia pidetään samoina, jos niissä on sama johtopari ja samat rivijäsenet. Kirjoita valintaprosessin kulkua mukailevana lausekkeena erilaisten mahdollisten toimikuntien lukumäärä, kun
a) ensin valitaan johtopari ja johtopari valitsee jäljelle jäävien joukosta rivijäsenet
b) ensin valitaan johtokunnan rivijäsenet ja rivijäsenet valitsevat jäljelle jäävien joukosta johtoparin
c) ensin valitaan koko johtokunta ja johtokunta valitsee keskuudestaan johtoparin
d) Osoita laskemalla, että lausekkeiden arvot ovat yhtä suuret.

Kertolaskusääntö

Tässä ja seuraavassa luvussa tutustutaan todennäköisyyksien laskusääntöihin eli menetelmiin, joilla voi laskea tapahtuman todennäköisyyden muiden tapahtumien todennäköisyyksien avulla. Aikaisemmin on käytetty jo yhtä laskusääntöä:

Tapahtuman A ja sen vastatapahtuman $\overline{A}$ todennäköisyyksien summa on 1.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Tapahtuman A vastatapahtuma $\overline{A}$ on tapahtuma ”A ei tapahdu”.

Ongelma

Pakasta vedetään kaksi korttia. Millä todennäköisyydellä
a) ensimmäinen kortti on ässä
b) toinen kortti on ässä, jos ensimmäinen kortti oli ässä
c) toinen kortti on ässä, jos ensimmäinen kortti ei ollut ässä?
d) Käytä alkeistapauksina kahden kortin jonoja ja laske, millä todennäköisyydellä molemmat kortit ovat ässiä.

JOHDANTOESIMERKKI 1

Pakasta vedetään kaksi korttia niin, että ensimmäistä korttia ei palauteta pakkaan. Millä todennäköisyydellä molemmat kortit ovat herttoja?

Ratkaisu

Tapahtuman ”molemmat kortit herttoja” todennäköisyys voidaan laskea käyttämällä alkeistapauksina kahden kortin jonoja. Kaikkien alkeistapauksien lukumäärä on $52 \cdot 51$ ja suotuisten alkeistapausten lukumäärä $13 \cdot 12$.

Siis

$$P(\text{molemmat herttoja}) = \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51} = \frac{1}{17} \approx 0{,}059.$$

Todennäköisyyden lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}.$$

Tulon ensimmäinen tekijä on todennäköisyys, että täydestä pakasta vedetty ensimmäinen kortti on hertta. Tulon toinen tekijä on todennäköisyys, että pakasta vedetty toinen kortti on hertta silloin, kun ensimmäinen kortti on ollut hertta. Tällöin nimittäin pakassa on jäljellä 51 korttia ja 12 herttaa. Tulon toinen tekijä on niin sanottu ehdollinen todennäköisyys:

todennäköisyys, että toinen kortti on hertta sillä ehdolla, että ensimmäinen kortti on hertta.

Vastaus $\frac{1}{17} \approx 0{,}059$

Ehdollinen todennäköisyys

Olkoot A ja B kaksi tapahtumaa. Todennäköisyys, että B tapahtuu, kun A on tapahtunut, on tapahtuman B *todennäköisyys ehdolla* A. Tapahtuman B todennäköisyyttä ehdolla A merkitään $\mathrm{P}(B \mid A)$.

Esimerkiksi kun pakasta vedetään peräkkäin kaksi korttia, niin

$$\mathrm{P}(\text{2. kortti on hertta} \mid \text{1. kortti on hertta}) = \frac{12}{51}$$

ja

$$\mathrm{P}(\text{2. kortti on hertta} \mid \text{1. kortti ei ole hertta}) = \frac{13}{51}.$$

Esimerkissä 1 havaittiin, että kun pakasta vedetään kaksi korttia, niin

$$\mathrm{P}(\text{1. kortti on hertta ja 2. kortti on hertta}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51},$$

missä tulon ensimmäinen tekijä on todennäköisyys
P(1. kortti on hertta) ja toinen tekijä ehdollinen todennäköisyys
P(2. kortti on hertta | 1. kortti on hertta).

Yleinen kertolaskusääntö

Olkoot A ja B kaksi tapahtumaa. Todennäköisyys, että molemmat tapahtumat A ja B tapahtuvat, on

$$\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A).$$

Kaavassa ”A ja B” tarkoittaa tapahtumaa ”sekä A että B tapahtuvat”. Kaavan mukaan todennäköisyys, että molemmat tapahtumat A ja B tapahtuvat, on tapahtumien ”A tapahtuu” ja ”B tapahtuu, kun A on tapahtunut” todennäköisyyksien tulo.

Yleinen kertolaskusääntö pätee myös useammalle tapahtumalle. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A_1 \text{ ja } A_2 \text{ ja } A_3 \text{ ja } A_4)\\ &= \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathrm{P}(A_3 | A_1 \text{ ja } A_2) \cdot \mathrm{P}(A_4 | A_1 \text{ ja } A_2 \text{ ja } A_3),\end{aligned}$$

missä esimerkiksi $\mathrm{P}(A_4 | A_1 \text{ ja } A_2 \text{ ja } A_3)$ on ehdollinen todennäköisyys, että A_4 tapahtuu, kun A_1, A_2 ja A_3 ovat tapahtuneet. Siis jokaiselle tapahtumalle lasketaan ehdollinen todennäköisyys, että tapahtuma tapahtuu, kun kaikki edeltävät tapahtumat ovat tapahtuneet.

ESIMERKKI 2

Pakasta nostetaan viisi korttia. Laske yleisen kertolaskusäännön avulla todennäköisyys, että kaikki kortit ovat herttoja.

Ratkaisu

Ajatellaan, että viisi korttia nostetaan yksitellen peräkkäin. Jokaiselle kortille lasketaan todennäköisyys, että kortti on hertta ehdolla, että kaikki edelliset olivat herttoja. Todennäköisyys, että kaikki ovat herttoja, on ehdollisten todennäköisyyksien tulo.

$$\mathrm{P}(\text{kaikki herttoja}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48} \approx 0{,}000495^*$$

Vastaus

0,000495

---

* Todennäköisyydelle saatu lauseke on saman näköinen kuin lauseke, joka saadaan kun lasketaan tapahtuman ”kaikki herttoja” klassinen todennäköisyys käyttämällä alkeistapauksina viiden kortin jonoja. Tällöin saadaan:

$$\mathrm{P}(\text{kaikki herttoja}) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}.$$

JOHDANTOESIMERKKI 3

Noppaa heitetään kahdesti. Millä todennäköisyydellä ensimmäisellä heitolla tulee vähintään silmäluku 2 ja toisella heitolla vähintään silmäluku 3?

Ratkaisu

Todennäköisyys voidaan laskea niin, että lasketaan suotuisten alkeistapausten lukumäärä kahden nopan heiton 36 alkeistapauksen joukosta. Todennäköisyys voidaan laskea myös yleisen kertolaskusäännön avulla:

Olkoon A tapahtuma ”ensimmäisellä heitolla vähintään 2” ja
B tapahtuma ”toisella heitolla vähintään 3”.
Yleisen kertolaskusäännön mukaan

$$\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A),$$

missä $\mathrm{P}(B \mid A)$ on todennäköisyys, että toisella heitolla tulee vähintään 3, kun ensimmäisellä heitolla on tullut vähintään 2. Ensimmäisen nopanheiton tulos ei kuitenkaan vaikuta toisen nopanheiton eri tulosten todennäköisyyksiin, joten $\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B)$ ja

$$\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9} \approx 0{,}56.$$

Vastaus

$\frac{5}{9} \approx 0{,}56$

Riippumattomat tapahtumat

Kaksi tapahtumaa ovat toisistaan *riippumattomat*, jos toisen tapahtuman todennäköisyys ei riipu siitä, onko toinen tapahtuma tapahtunut vai ei.

Pakasta vedetään kaksi korttia peräkkäin. Ennen toisen kortin vetämistä ensimmäinen kortti palautetaan pakkaan ja pakka sekoitetaan. Tapahtumat ”ensimmäinen kortti on hertta” ja ”toinen kortti on hertta” ovat toisistaan riippumattomat.

Noppaa heitetään kolmesti. Tapahtumat ”ensimmäisellä heitolla kuutonen”, ”toisella heitolla kolmonen” ja ”kolmannella heitolla nelonen” ovat kaikki toisistaan riippumattomat.

Jos tapahtumat A ja B ovat riippumattomat, niin $\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B)$.

Saadaan:

Riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntö

Jos tapahtumat A ja B ovat toisistaan riippumattomat, niin todennäköisyys, että molemmat tapahtuvat, on A:n ja B:n todennäköisyyksien tulo.

$$\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

Riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntö pätee myös useammalle toisistaan riippumattomalle tapahtumalle. Todennäköisyys, että ne kaikki tapahtuvat, on todennäköisyyksien tulo.

$$\mathrm{P}(A_1 \text{ ja } A_2 \text{ ja } \ldots \text{ ja } A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(A_n)$$

ESIMERKKI 4

Kouluun kävelevä Essi kohtaa matkallaan kahdet jalankulkuvalot, joiden toiminta on toisistaan riippumatonta. Ensimmäinen valo näyttää punaista 30 % ajasta ja toinen 60 % ajasta. Millä todennäköisyydellä Essi koulumatkallaan

a) joutuu pysähtymään molempiin liikennevaloihin

b) ei joudu pysähtymään kumpaankaan liikennevaloon?

Ratkaisu

a) On laskettava tapahtuman ”molemmat valot ovat punaisella” todennäköisyys. Koska valot toimivat toisistaan riippumattomasti, voidaan käyttää riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntöä.

P(molemmat punaisella)

= P(1. punaisella ja 2. punaisella) $\quad P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$

= P(1. punaisella) · P(2. punaisella)

= 0,3 · 0,6 = 0,18

b) On laskettava tapahtuman ”molemmat valot ovat vihreällä” eli ”1. valo vihreällä ja toinen valo vihreällä” todennäköisyys.

Osatapahtumien todennäköisyydet ovat:

P(1. valo vihreällä) = 1 – 0,3 = 0,7

P(2. valo vihreällä) = 1 – 0,6 = 0,4

Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön nojalla

P(molemmat vihreällä)

= P(1. vihreällä ja 2. vihreällä) $\quad P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$

= P(1. vihreällä) · P(2. vihreällä)

= 0,7 · 0,4 = 0,28.

Vastaus

a) 0,18 b) 0,28

ESIMERKKI 5

Arkipäivän maantieliikenteessä noin kaksi autoilijaa tuhannesta ajaa alkoholin vaikutuksen alaisena. Poliisi puhalluttaa 300 satunnaisesti valittua autoilijaa. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi rattijuoppo jää kiinni?

Ratkaisu

On laskettava, millä todennäköisyydellä 300 satunnaisesti valitusta autoilijasta ainakin yksi eli yksi tai kaksi tai kolme jne. ajaa alkoholin vaikutuksen alaisena. Koska vaihtoehtoja on paljon, on yksinkertaisempaa laskea ensin vastatapahtuman ”kukaan 300 autoilijasta ei ole alkoholin vaikutuksen alainen” todennäköisyys.

Todennäköisyys, että yksittäinen satunnaisesti valittu autoilija on alkoholin vaikutuksen alainen, on $\frac{2}{1\,000} = 0{,}002$. Todennäköisyys, että autoilija ei ole alkoholin vaikutuksen alainen, on $1 - 0{,}002 = 0{,}998$.

Tapahtuma ”kukaan 300 puhalletusta autoilijasta ei ole alkoholin vaikutuksen alainen” voidaan ilmaista muodossa

”ensimmäinen ei ole ja toinen ei ole ja ... ja 300. ei ole”

Koska autoilijat valitaan satunnaisesti, niin tapahtumia ”ensimmäinen ei ole”, ”toinen ei ole” jne. voidaan pitää toisistaan riippumattomina.

Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön perusteella

$$\text{P(kukaan 300 autoilijasta ei ole)} = \underbrace{0{,}998 \cdot 0{,}998 \cdot \ldots \cdot 0{,}998}_{\text{300 kappaletta}} = 0{,}998^{300}.$$

Siis

$$\text{P(ainakin yksi on)} = 1 - \text{P(kukaan ei ole)} = 1 - 0{,}998^{300} \approx 0{,}45.$$

Vastaus

0,45

ESIMERKKI 6

Rengastetuista kanahaukoista tavataan myöhemmin 15 %. Kuinka monta kanahaukkaa tulee rengastaa, jotta todennäköisyys, että ainakin yksi haukka tavataan myöhemmin, olisi suurempi kuin 0,99? Oletetaan, että eri rengastetut kanahaukat tavataan toisistaan riippumatta.

Ratkaisu

Tapahtuma ”ainakin yksi tavataan” on tapahtuman ”yhtään ei tavata” vastatapahtuma.

Rengastetaan n kanahaukkaa. Todennäköisyys, että yksittäistä haukkaa ei tavata, on 0,85. Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön nojalla todennäköisyys, että n rengastetusta haukasta yhtään ei tavata, on $0{,}85^n$.

Siis

$$P(\text{ainakin yksi tavataan}) = 1 - P(\text{yhtään ei tavata}) = 1 - 0{,}85^n.$$

Ratkaistaan, kuinka suuri luvun n tulee vähintään olla, jotta todennäköisyys olisi suurempi kuin 0,99.

$$\begin{aligned} 1 - 0{,}85^n &> 0{,}99 \\ -0{,}85^n &> -0{,}01 \qquad \big| \cdot (-1) \\ 0{,}85^n &< 0{,}01 \end{aligned}$$

Ratkaistaan epäyhtälö systemaattisella kokeilulla.*

Lausekkeen $0{,}85^n$ arvot pienenevät n:n arvojen kasvaessa. On löydettävä ensimmäinen n:n arvo, jolle lausekkeen $0{,}85^n$ arvo on pienempi kuin 0,01.

---

* Kurssissa Juuri- ja logaritmifunktiot opitaan ratkaisemaan tällaiset epäyhtälöt logaritmin avulla.

Aloitetaan ennakkoarvauksella $n = 25$.*

$0{,}85^{25} \approx 0{,}017$ Suurempi kuin 0,01.
$0{,}85^{26} \approx 0{,}015$ Suurempi kuin 0,01.
$0{,}85^{27} \approx 0{,}0124$ Suurempi kuin 0,01.
$0{,}85^{28} \approx 0{,}0106$ Suurempi kuin 0,01.
$0{,}85^{29} \approx 0{,}00898$ Pienempi kuin 0,01.

Ensimmäinen n:n arvo, jolla $0{,}85^n$ on pienempi kuin 0,01, on 29. Tulee siis rengastaa vähintään 29 kanahaukkaa.

Vastaus vähintään 29

* Haettua arvoa lähellä olevan n:n arvon voi löytää laskimella kokeilemalla. Sen jälkeen seuraavia arvoja voi laskea niin, että laskimessa oleva edellinen arvo kerrotaan aina luvulla 0,85. Toinen tapa on käyttää laskimen [ENTRY] -näppäintä ja kasvattaa eksponenttia.

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

190. Ryhmästä, jossa on viisi naista ja neljä miestä, arvotaan kolme. Laske yleisen kertolaskusäännön avulla todennäköisyys, että arvottu ryhmä muodostuu pelkästään naisista. Millä muilla tavoin todennäköisyys voidaan laskea?

191. Noppaa heitetään kahdesti. Laske todennäköisyydet $P(B|A)$ ja $P(A \text{ ja } B)$. Ovatko tapahtumat A ja B toisistaan riippumattomat?
a) A on tapahtuma ”ensimmäisellä heitolla silmäluku 4” ja B on tapahtuma ”jälkimmäisellä heitolla saadaan suurempi silmäluku kuin ensimmäisellä”.
b) A on tapahtuma ”ensimmäisellä heitolla silmäluku 4” ja B on tapahtuma ”jälkimmäisellä heitolla silmäluku 5”
c) A on tapahtuma ”ensimmäisellä heitolla silmäluku 4” ja B on tapahtuma ”silmälukujen summa on 9”.

192. Liisa kylvi samaan ruukkuun yhden sitruunansiemenen ja yhden appelsiininsiemenen. Oletetaan, että siemenet itävät toisistaan riippumatta ja että sitruunansiemen itää todennäköisyydellä 0,4 ja appelsiininsiemen todennäköisyydellä 0,3. Millä todennäköisyydellä
a) molemmat siemenet itävät
b) kumpikaan siemenistä ei idä
c) sitruunansiemen itää ja appelsiininsiemen ei idä
d) appelsiininsiemen itää ja sitruunansiemen ei idä?

193. Pelaajatilaston mukaan eräs koripalloilija onnistuu 76 prosentissa vapaaheitoista. Millä todennäköisyydellä kaikki vapaaheitot menevät koriin, kun pelaaja heittää a) kaksi b) kolme vapaaheittoa?
(Huippu-urheilijoiden onnistumistodennäköisyyksiä peräkkäisissä suorituksissa on tutkittu laajojen pelaajatilastojen avulla. On osoittautunut, ehkä yllättäen, että onnistumisen todennäköisyys ei riipu merkitsevästi siitä, kuinka edellisessä suorituksessa kävi.)

194. Ihmiset kuuluvat johonkin neljästä pääveriryhmästä A, B, AB ja O. Suomalaisista 44 % kuuluu A-veriryhmään, 17 % B-ryhmään, 8 % AB-ryhmään ja 31 % O-ryhmään. Lisäksi noin 85 %:lla suomalaisista on veressään ns. reesustekijä Rh+ (reesuspositiiviset ihmiset), joka puuttuu muilta (reesusnegatiiviset ihmiset). Reesustekijän esiintyminen on täysin riippumaton ihmisen veriryhmästä. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu suomalainen kuluu veriryhmään
a) A+ (pääveriryhmä A ja Rh+)
b) B– (pääveriryhmä B ja Rh–)?

195. Vakioveikkauksessa on 13 veikkauskohdetta, joissa jokaisessa on valittava merkki 1, × tai 2. Laske kertolaskusäännön avulla todennäköisyys, että arpomalla täytetyssä veikkausrivissä on a) 13 oikein b) ei yhtään oikein.

196. Kannattaako lyödä vetoa sen puolesta, että neljällä nopanheitolla saadaan ainakin yksi kuutonen? (Tämän kysymyksen esitti ranskalainen aatelismies de Méré noin vuonna 1650 Blaise Pascalille ja antoi ratkaisevan sysäyksen todennäköisyyslaskennan kehitykselle.)

197. Pikku-Antti panee saapasparin saappaat umpimähkään jalkaansa. Millä todennäköisyydellä
a) vasemman jalan saapas menee väärään jalkaan
b) vasemman ja oikean jalan saapas menevät molemmat väärään jalkaan?

198. Taskulaskimen omistaja on todennut, että hän laskiessaan näppäilee väärin keskimäärin joka 15. näppäilyn. Millä todennäköisyydellä hän saa oikean tuloksen laskusta, joka vaatii 12 näppäilyä? Oletetaan, että väärän näppäilyn vaikutus ei korjaudu toisella väärällä näppäilyllä.

199. Seuramatkalennolla kuulutetaan matkustajien joukosta lääkäriä. Millä todennäköisyydellä 150 matkustajan joukossa on ainakin yksi lääkäri? Suomessa on yksi lääkäri 330 henkeä kohti. Oletetaan, että lennon osallistujia voidaan pitää satunnaisena otoksena suomalaisia.

200. Suomalaisista 44 % kuuluu pääveriryhmään A. Kuinka suuri satunnaisesti valitun suomalaisen verenluovuttajaryhmän tulee olla, jotta todennäköisyys, että mukana on ainakin yksi veriryhmään A kuuluva verenluovuttaja, olisi suurempi kuin 0,99?

201. Arkipäivän maantieliikenteessä noin kaksi kuljettajaa tuhannesta ajaa alkoholin vaikutuksen alaisena. Kuinka monta satunnaisesti valittua kuljettajaa poliisin tulee puhalluttaa, jotta todennäköisyys, että ainakin yksi rattijuoppo saadaan kiinni, olisi suurempi kuin 0,90?

202. Tuotteessa ovat mahdollisia kolme erityyppistä vikaa, jotka esiintyvät toisistaan riippumattomasti ja joiden todennäköisyydet ovat 0,01, 0,02 ja 0,03. Millä todennäköisyydellä
a) satunnaisesti valittu yksi tuote on viallinen
b) satunnaisesti valitusta kymmenestä tuotteesta ainakin yksi on viallinen?

203. Tuomas ostaa arpoja yksitellen. Millä todennäköisyydellä neljäs arpa on ensimmäinen voittoarpa, kun
a) arpojen lukumäärä on suuri, ja 30 % arvoista on voittoarpoja
b) kyseessä on myyjäisten arpajaiset, ja jäljellä on kymmenen arpaa, joista kolme on voittoarpoja?

204. Koneen valmistamista sulkapalloista 2,0 % on viallisia. Pallot pakataan kuuden pallon koteloihin. Tukkuliike hyväksyy myyntiin ainoastaan ne kotelot, joissa kaikki pallot ovat virheettömiä ja palauttaa loput. Kuinka monen kotelon 10 000 kotelon tuotantoerästä voidaan ennakoida tulevan palautetuksi?

205. Koneen valmistamat tennispallot pakattiin ilman laadunvalvontaa neljän pallon pakkauksiin. Myöhemmin todettiin, että 2,5 %:ssa pakkauksista kaikki pallot olivat virheellisiä. Kuinka monta prosenttia palloista oli virheellisiä?

206. Suomalaisista miehistä 8 % ja naisista 0,6 % on punavihersokeita. Ryhmässä on 14 miestä ja 15 naista. Millä todennäköisyydellä ryhmässä
a) on ainakin yksi punavihersokea
b) on ainakin yksi punavihersokea mies ja ainakin yksi punavihersokea nainen?

207. Naisella on sukupuolikromosomipari XX ja miehellä pari XY. Tyttö saa toisen X-kromosominsa äidiltä ja toisen isältä. Poika saa X-kromosomin äidiltä ja Y-kromosomin isältä. Geeniominaisuus, joka aiheuttaa punavihersokeuden, on väistyvänä ominaisuutena X-kromosomissa. Tämä tarkoittaa, että tyttö on punavihersokea, jos punavihersokeuden geeniominaisuus on molemmissa X-kromosomeissa, ja poika on punavihersokea, jos hänellä on punavihersokeuden geeniomionaisuus ainoassa X-kromosomissaan. Laske, millä todennäköisyydellä syntyvä poika ja millä todennäköisyydellä syntyvä tyttö on punavihersokea, jos
a) äiti on punavihersokea ja isä ei ole
b) äiti on punavihersokeuden kantaja ja isä on punavihersokea.
Kumpikaan naisen vanhemmista ei ole punavihersokea, mutta hänen veljensä on. Millä todennäköisyydellä naiselle syntyvä
c) poika d) tyttö on punavihersokea?
Lapsen isää ei tunneta. Miehistä 8 % on punavihersokeita.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

208. Myyjäisten arpajaisissa on jäljellä 12 arpaa, joista viisi voittaa. Matti ostaa neljä arpaa. Laske yleisen kertolaskusäännön avulla todennäköisyys, että yksikään arpa ei ole voittoarpa. Millä muilla tavoin todennäköisyys voidaan laskea?

209. Kyselyn mukaan 52 % kuntalaisista on tyytyväisiä terveydenhoitoon, 64 % on tyytyväisiä joukkoliikenteeseen ja 36 % on tyytyväisiä sekä terveydenhoitoon että joukkoliikenteeseen. Olkoon A tapahtuma ”satunnaisesti valittu kuntalainen on tyytyväinen terveydenhoitoon” ja B tapahtuma ”satunnaisesti valittu kuntalainen on tyytyväinen joukkoliikenteeseen”.
a) Kuvaile tapahtuma ”B ehdolla A”. Laske todennäköisyys $\mathrm{P}(B|A)$.
b) Kuvaile tapahtuma ”A ehdolla B”. Laske todennäköisyys $\mathrm{P}(A|B)$.

210. Koulun monistuskoneista toinen on rikki keskimäärin 25 % kouluajasta ja toinen 15 % kouluajasta. Oletetaan, että koneet särkyvät toisistaan riippumatta. Millä todennäköisyydellä satunnaisena koulupäivän hetkenä
a) molemmat monistuskoneet ovat rikki
b) molemmat monistuskoneet toimivat?

211. Raviveikkauksessa V5 on valittava viiden ravilähdön voittaja. Eräällä veikkauskierroksella ensimmäisessä ja toisessa lähdössä oli 8 hevosta, kolmannessa ja neljännessä 16 hevosta ja viidennessä 12 hevosta. Laske kertolaskusäännön avulla todennäköisyys, että rivinsä umpimähkään täyttävä saa a) 5 oikein b) ei yhtään oikein.

212. Monopolipelissä heitetään kahta noppaa. Jos tulee pari (sama silmäluku), pelaaja heittää uudelleen. Jos vielä kolmannella heittokerralla tulee pari, niin pelaaja joutuu vankilaan. Millä todennäköisyydellä pelaaja heittovuorollaan joutuu tästä syystä vankilaan?

213. Millä todennäköisyydellä viidestä ostetusta arvasta ainakin yksi voittaa, kun
a) kyseessä on suuret arpajaiset, joissa joka kolmas arpa voittaa
b) kyseessä on myyjäisten arpajaiset, ja jäljellä on 12 arpaa, joista neljä voittaa?

214. Kahta noppaa heitetään 24 kertaa. Kannattaako lyödä vetoa sen puolesta, että ainakin kerran tulee kuutospari? (Tämän on toinen de Mérén Pascalille esittämä ongelma, katso tehtävä 196.)

215. Sataman tulli tarkastaa satunnaisesti valiten keskimäärin joka 20. matkustajan. Millä todennäköisyydellä 20 hengen retkiseurueesta kukaan ei joudu tarkastukseen?

216. Ryhmän kaikki 28 oppilasta ovat syntyneet vuonna 1992. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi heistä on syntynyt helmikuun 29. päivänä?

217. Suomalaisista 6,4 %:lla on äidinkielenä ruotsi. Kuinka monta jäsentä tulee satunnaisesti kootussa suomalaisryhmässä vähintään olla, jotta todennäköisyys, että ryhmässä on ainakin yksi ruotsia äidinkielenään puhuva, olisi suurempi kuin 0,9?

218. Kolmea noppaa heitetään. Kuinka pitkä tulee heittosarjan olla, jotta kannattaisi lyödä vetoa sen puolesta, että ainakin kerran tulee kolme kuutosta?

219. Artikkelin oikovedoksen lukee kolme henkilöä, joista ensimmäinen löytää yksittäisen painovirheen todennäköisyydellä 0,5, toinen todennäköisyydellä 0,6 ja kolmas todennäköisyydellä 0,7. Mikä on todennäköisyys, että oikovedoksen kaikki viisi painovirhettä löytyvät?

220. Syntyvistä lapsista 51,2 % on poikia. Kuinka monta prosenttia seitsenlapsisista perheistä on sellaisia, joissa kaikki lapset ovat
a) poikia b) tyttöjä?
c) Kuinka monta prosenttia enemmän on seitsemän veljeksen perheitä kuin seitsemän sisaren perheitä?

221. Lasit pakataan kahdeksan lasin pakkauksiin. Laadunvalvonnassa valvontarobotti läpivalaisee pakkaukset ja hylkää ne, joissa on ainakin yksi viallinen lasi. Erään koneen suuresta tuotantoerästä hylättiin 12 % pakkauksista. Kuinka monta prosenttia koneen valmistamista laseista oli virheellisiä?

222. Kalle pelasi korttipeliä, jossa pelaajalle jaetaan viisi korttia. Kolmessa peräkkäisessä jaossa hän sai jokaisessa tasan yhden ässän. Millä todennäköisyydellä näin voi käydä?

223.
Elossa olevia 1 000 vastasyntynyttä kohden.

ikä	miehiä	naisia
0	1000	1000
20	986	992
40	951	979
60	801	922
80	294	551

Laske taulukon eloonjäämislukujen avulla, millä todennäköisyydellä kahden 20-vuotiaan miehen ja kolmen 20-vuotiaan naisen muodostamasta ystäväpiiristä
a) ainakin yksi elää 80-vuotiaaksi
b) ainakin yksi mies ja ainakin yksi nainen elävät 80-vuotiaiksi.

224. 1960- ja 1970-lukujen vaihteessa yleisin tytöille annettu ensimmäinen etunimi oli Sari (4 % tytöistä) ja yleisin poikien nimi Jari (6 % pojista). Kuinka monta tuolloin syntynyttä mies–nainen-paria tulee vähintään olla koolla, jotta kannattaisi lyödä vetoa sen puolesta, että joukossa on
a) ainakin yksi Sari tai ainakin yksi Jari
b) ainakin yksi Sari ja ainakin yksi Jari
c) ainakin yksi Sari–Jari-pari?

Yhteenlaskusääntö

Ongelma

Pakasta vedetään kortti. Laske tapahtumille suotuiset alkeistapaukset ja tapahtumien todennäköisyys.
a) ”tulee hertta”, ”tulee ässä” ja ”tulee hertta tai ässä”
b) ”tulee kuningas”, ”tulee ässä” ja ”tulee kuningas tai ässä”?

Tapahtuma ”*A* tai *B*”

Olkoot A ja B kaksi tapahtumaa. Tapahtuma ”A tai B” tarkoittaa tapahtumaa ”ainakin toinen tapahtumista A ja B tapahtuu”.*

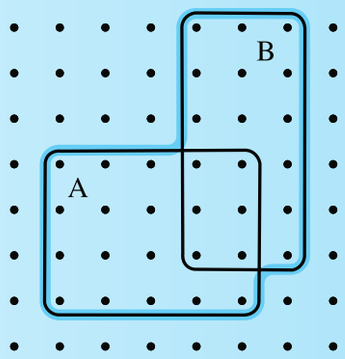
Pakasta vedetään yksi kortti. Jos A on tapahtuma ”tulee pata” ja B on tapahtuma ”tulee kuningas”, niin tapahtuma ”A tai B” tapahtuu, kun tulee mikä tahansa pata tai mikä tahansa kuningas, siis myös silloin kun tulee patakuningas.

Muodostetaan kaava, jolla voidaan laskea tapahtuman ”A tai B” todennäköisyys.

---

* Tavallisessa kielessä sanaa *tai* käytetään kahdessa eri merkityksessä. Toinen merkitys sallii molempien vaihtoehtojen toteutumisen, esimerkiksi: Jos sataa tai tuulee, niin veneretki peruutetaan. Toinen merkitys sulkee toisen vaihtoehdon pois, esimerkiksi: Jälkiruoaksi on jäätelö tai suklaavanukas. Matematiikassa tai-sanaa käytetään aina ensimmäisessä merkityksessä, esimerkiksi: Lukua 10 pienemmät positiiviset kokonaisluvut, jotka ovat jaollisia luvulla 2 tai 3, ovat luvut 2, 3, 4, **6**, 8 ja 9. Toinen asia on, että tai-sanalla yhdistetyt lauseet saattavat sinällään olla toisensa poissulkevia, esimerkiksi: Yhtälö $x^2 = 9$ toteutuu, kun $x = 3$ tai $x = -3$.

Oletetaan, että A ja B ovat tapahtumia samassa perusjoukossa. Tapahtumalle ”A tai B” ovat suotuisia ne alkeistapaukset, jotka ovat suotuisia ainakin toiselle tapahtumista A ja B.



Olkoon perusjoukon kaikkien alkeistapausten lukumäärä n, tapahtumalle A suotuisten alkeistapausten lukumäärä n_A ja tapahtumalle B suotuisten alkeistapausten lukumäärä n_B. Tapahtumalle ”A tai B” suotuisten alkeistapausten lukumäärä on

$$n_A + n_B - n_{AB},$$

missä n_{AB} on tapahtumien A ja B yhteisten alkeistapausten lukumäärä. Summassa $n_A + n_B$ tulee nimittäin yhteisten alkeistapausten lukumäärä lasketuksi kahteen kertaan.

Tapahtumien A ja B yhteiset alkeistapaukset ovat tapahtumalle ”A ja B” suotuisia alkeistapauksia, joten

$$\mathrm{P}(A \text{ tai } B) = \frac{n_A + n_B - n_{AB}}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} - \frac{n_{AB}}{n}$$

$$= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \text{ ja } B).$$

Yleinen yhteenlaskusääntö

$$\mathrm{P}(A \text{ tai } B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \text{ ja } B)$$

Todennäköisyys, että ainakin toinen tapahtumista A ja B tapahtuu, on tapahtumien A ja B todennäköisyyksien summa vähennettynä tapahtuman ”sekä A että B tapahtuvat” todennäköisyydellä.

ESIMERKKI 1

Pakasta vedetään kaksi korttia. Millä todennäköisyydellä molemmat kortit ovat punaisia (herttoja tai ruutuja) tai molemmat kortit ovat ässiä?

Ratkaisu

Yleisen yhteenlaskusäännön nojalla:

P(molemmat punaisia tai molemmat ässiä)

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(A \text{ tai } B) \\ &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \text{ ja } B) \end{aligned}$$

= P(molemmat punaisia) + P(molemmat ässiä)
– P(molemmat punaisia ja molemmat ässiä)

Valitaan alkeistapauksiksi 52 kortin joukosta valitut kahden kortin jonot.* Alkeistapausten lukumäärä on $52 \cdot 51$.

Tapahtumalle ”molemmat punaisia” suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $26 \cdot 25$.

Tapahtumalle ”molemmat ässiä” suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $4 \cdot 3$.

Pakassa on kaksi korttia (herttaässä ja ruutuässä), jotka ovat sekä punaisia että ässiä. Tapahtumalle ”molemmat punaisia ja molemmat ässiä” suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $2 \cdot 1$.

Siis:

P(molemmat punaisia tai molemmat ässiä)

$$= \frac{26 \cdot 25}{52 \cdot 51} + \frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51} - \frac{2 \cdot 1}{52 \cdot 51} \approx 0{,}249$$

Vastaus

0,249

---

* Alkeistapauksiksi voidaan valita myös kahden kortin osajoukot tai todennäköisyydet voidaan laskea yleisen kertolaskusäännön avulla.

Poissulkevat tapahtumat

Kaksi tapahtumaa ovat *toisensa poissulkevia* eli *erillisiä*, jos toisen tapahtuessa toinen ei voi tapahtua.

Rahaa heitetään kolmesti.
Tapahtumat ”tulee (tasan) yksi kruuna” ja ”tulee (tasan) kaksi kruunaa” ovat toisensa poissulkevat.
Tapahtumat ”tulee ainakin yksi kruuna” ja ”tulee ainakin kaksi kruunaa” eivät ole toisensa poissulkevia. Molemmat tapahtumat tapahtuvat, jos tulee kaksi tai kolme kruunaa.

Toisensa poissulkevilla tapahtumilla A ja B ei ole yhteisiä alkeistapauksia, joten niille on $\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = 0$.

Poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntö

Jos tapahtumat A ja B ovat toisensa poissulkevat, niin

$$\mathrm{P}(A \text{ tai } B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

Jos tapahtumat A ja B ovat toisensa poissulkevat, niin todennäköisyys, että jompikumpi niistä tapahtuu, on tapahtumien A ja B todennäköisyyksien summa.

Yleisemmin tapahtumat $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ovat toisensa poissulkevia, jos yhden tapahtuessa mikään muu ei voi tapahtua. Tällöin todennäköisyys, että jokin niistä tapahtuu, on tapahtumien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ todennäköisyyksien summa.

$$\mathrm{P}(A_1 \text{ tai } A_2 \text{ tai } \ldots \text{ tai } A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_n)$$

ESIMERKKI 2

Krookuslajikkeen sipuleista itää 80 % ja tulppaanilajikkeen sipuleista 60 %. Maahan istutetaan kummankin kukan sipuli. Sipulien oletetaan itävän toisistaan riippumatta. Millä todennäköisyydellä kahdesta istutetusta sipulista a) tasan yksi itää b) ainakin yksi itää?

Ratkaisu

a) Tapahtuma ”sipuleista yksi itää” muodostuu kahdesta toisensa poissulkevasta tapahtumasta: ”K (krookus) itää ja T (tulppaani) ei idä” tai ”K ei idä ja T itää”. Todennäköisyys lasketaan poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännöllä.

$$\begin{aligned}
&\text{P(yksi itää)}\\
&= \text{P(K itää ja T ei idä)} + \text{P(K ei idä ja T itää)}\\
&= \text{P(K itää)} \cdot \text{P(T ei idä)} + \text{P(K ei idä)} \cdot \text{P(T itää)}\\
&= 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}44
\end{aligned}$$

b) *Tapa 1.* Tapahtuma ”ainakin yksi itää” tarkoittaa tapahtumaa ”yksi itää tai kaksi itää”. Voidaan käyttää poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntöä.

$$\begin{aligned}
&\text{P(ainakin yksi itää)} = \text{P(yksi itää tai kaksi itää)}\\
&= \text{P(yksi itää)} + \text{P(kaksi itää)}\\
&= \text{P(K itää ja T ei idä)} + \text{P(T ei idä ja K itää)} + \text{P(K itää ja T itää)}\\
&= 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}92
\end{aligned}$$

Tapa 2. Lyhyemmällä laskulla päästään, kun lasketaan ensin vastatapahtuman ”yksikään ei idä” todennäköisyys.

$$\begin{aligned}
&\text{P(ainakin yksi itää)} = 1 - \text{P(yksikään ei idä)} = 1 - \text{P(K ei idä ja T ei idä)}\\
&= 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}92^{*}
\end{aligned}$$

Vastaus

a) 0,44 b) 0,92

---

* Kolmas tapa olisi käyttää yleistä yhteenlaskusääntöä. Tapahtuma ”ainakin yksi itää” tarkoittaa tapahtumaa ”K itää tai T itää” ja

$$\begin{aligned}
&\text{P(K itää tai T itää)} = \text{P(K itää)} + \text{P(T itää)} - \text{P(K itää ja T itää)}\\
&= \text{P(K itää)} + \text{P(T itää)} - \text{P(K itää)} \cdot \text{P(T itää)}\\
&= 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}92.
\end{aligned}$$

ESIMERKKI 3

Rasiassa 1 on yksi valkoinen ja kaksi mustaa palloa. Rasiassa 2 on kaksi valkoista ja kolme mustaa palloa. Valitaan rasia umpimähkään ja poimitaan valitusta rasiasta umpimähkään pallo. Millä todennäköisyydellä saatu pallo on valkoinen?

Ratkaisu

Valkoinen pallo voidaan saada niin, että ensin valitaan rasia 1 ja siitä valkoinen pallo, tai niin, että ensin valitaan rasia 2 ja siitä valkoinen pallo. Vaihtoehdot ovat toisensa poissulkevat, joten

P(saadaan valkoinen pallo)

= P(rasia 1 ja valkoinen pallo rasiasta 1) +
P(rasia 2 ja valkoinen pallo rasiasta 2)

= P(rasia 1) · P(valkoinen pallo rasiasta 1) +
P(rasia 2) · P(valkoinen pallo rasiasta 2)

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{11}{30} \approx 0{,}37.$$

Vastaus

$\frac{11}{30} \approx 0{,}37$*

---

* Tutkitulla tapahtumalla oli erilaisia toisensa poissulkevia toteutumisvaihtoehtoja. Tapahtuman todennäköisyys saatiin laskemalla yhteen toteutumisvaihtoehtojen todennäköisyydet. Näin laskettua todennäköisyyttä kutsutaan usein *kokonaistodennäköisyydeksi*.

ESIMERKKI 4

Noppaa heitetään neljästi. Millä todennäköisyydellä tulee tasan yksi kuutonen?

Ratkaisu

Neljän nopanheiton sarjassa yksi kuutonen voi tulla ensimmäisellä, toisella, kolmannella tai neljännellä heitolla.
Merkitään A = ”heitolla tulee 6”, jolloin heittosarjat ovat

$A\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}$, $\overline{A}A\overline{A}\,\overline{A}$, $\overline{A}\,\overline{A}A\overline{A}$, $\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}A$.

Sarjat ovat toisensa poissulkevat, joten

P(neljällä heitolla yksi kuutonen)

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= 4 \cdot \frac{5^3}{6^4} \approx 0{,}39.$$

Vastaus

0,39

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

225. Pakasta vedetään yksi kortti. Millä todennäköisyydellä kortti on pata tai ässä?

226. Pakasta vedetään kaksi korttia. Millä todennäköisyydellä molemmat kortit ovat patoja tai molemmat ovat kuvakortteja? Kuvakortteja ovat sotamies, kuningatar, kuningas ja ässä.

227. Noppaa heitetään kahdesti. Millä todennäköisyydellä ensimmäisellä heitolla tulee 5 tai toisella heitolla tulee 4?

228. Ovatko tapahtumat A ja B toisensa poissulkevat?
a) Heitetään noppaa kahdesti.
A: Ensimmäisellä heitolla tulee 6 ja toisella 5.
B: Ensimmäisellä heitolla tulee 6, ja toisella heitolla tulee 6.
b) A: Hannu myöhästyy koulusta.
B: Marja myöhästyy koulusta.
c) Heitetään neljää kolikkoa.
A: Tulee (tasan) kaksi klaavaa.
B: Tulee (tasan) kolme klaavaa.
d) Heitetään neljää kolikkoa.
A: Tulee ainakin yksi klaava.
B: Tulee ainakin kaksi klaavaa.

229. Ruukkuun on kylvetty kaksi siementä, joista toisen tiedetään itävän todennäköisyydellä 0,9 ja toisen todennäköisyydellä 0,8. Siementen tiedetään itävän toisistaan riippumatta. Millä todennäköisyydellä siemenistä
a) (tasan) yksi itää
b) ainakin yksi itää?

230. Ihmisistä 85 % on reesuspositiivisia (muut reesusnegatiivisia). Millä todennäköisyydellä
a) puolisot ovat molemmat reesusnegatiivisia
b) puolisoilla on sama reesusominaisuus?

231. Lukion opiskelijoista 62 % vastustaa ja 38 % kannattaa Suomen NATO-jäsenyyttä. Mikä on todennäköisyys, että kahdella satunnaisesti valitulla lukiolaisella on eri mielipide Suomen NATO-jäsenyydestä?

232. Millä todennäköisyydellä nelilapsen perheen kaikki lapset ovat samaa sukupuolta? Syntyvistä lapsista 51,2 % on poikia.

233. Lipaston laatikossa on neljä punaista ja kuusi mustaa sukkaa. Aamun pimeydessä pukeutuva ottaa laatikosta kaksi sukkaa. Millä todennäköisyydellä sukat ovat samanväriset?

234. Ensimmäisessä rasiassa on kaksi valkoista palloa ja yksi musta pallo, toisessa rasiassa on kaksi valkoista palloa ja kaksi mustaa palloa, ja kolmannessa rasiassa on kolme valkoista palloa ja yksi musta pallo. Valitaan rasia umpimähkään ja poimitaan siitä pallo. Millä todennäköisyydellä pallo on valkoinen?

235. Tehtaan valmistamista mikropiireistä 75 % tulee koneesta 1 ja 25 % koneesta 2. Koneen 1 valmistamista mikropiireistä 5 % on viallisia ja koneen 2 valmistamista ulkonaisesti samanlaista mikropiireistä 18 % on viallisia. Millä todennäköisyydellä tehtaan tuotannosta satunnaisesti poimittu mikropiiri on viallinen?

236. Noppaa heitetään viidesti. Millä todennäköisyydellä heittosarjassa on yksi kuutonen?

237. Koripalloilija heittää keskimäärin 80 % vapaaheitoista koriin. Millä todennäköisyydellä hän kolmella vapaaheitolla saa
a) kaksi koria
b) ainakin kaksi koria?

238. Koulutiellä on kolmet jalankulkuvalot, jotka toimivat toisistaan riippumattomasti ja ovat punaisella 40 %, 60 % ja 70 % ajasta. Olkoon satunnaismuuttuja X koulumatkalla kohdattavien punaisten valojen lukumäärä. Määritä satunnaismuuttujan X jakauma ja odotusarvo.

239. Kolikkoa heitetään, kunnes tulee ensimmäinen klaava. Millä todennäköisyydellä tarvitaan vähemmän kuin neljä heittoa?

240. Ampuja ampui 400 laukausta ja sai seuraavat osumat.

pisteluku	frekvenssi
0	9
1	24
2	52
3	75
4	160
5	80

Laske aineiston perusteella todennäköisyys, että ampuja saa kahdella peräkkäisellä laukauksella yhteensä ainakin kahdeksan pistettä.

241. Monopolipelissä heitetään kahta noppaa ja siirrytään silmälukujen summan mukaisesti. Jos tulee pari, heitetään uudestaan ja siirrytään taas silmälukujen summan mukaisesti. Jos toisellakin heitolla tulee pari, heitetään kolmannen kerran. Jos nyt tulee pari, pelaaja joutuu vankilaan, muutoin hän siirtyy silmälukujen summan mukaisesti.
Millä todennäköisyydellä pelaaja seuraavalla heittovuorollaan päätyy Erottajalle, kun hän nyt on
a) yhteismaaruudussa kuuden askeleen päässä Erottajalta
b) Eirassa seitsemän askeleen päässä Erottajalta?
Välillä olevan sattumaruudun mahdollista vaikutusta ei oteta huomioon.

242. Suomalaisista naisista noin 0,6 % ja miehistä noin 8 % on punavihersokeita. Olkoon p todennäköisyys, että satunnaisesti valittu suomalainen nainen on punavihersokeuden kantaja. Ilmaise p:n lausekkeena todennäköisyys, että mies on punavihersokea, ja ratkaise p.
Punavihersokeus on väistyvänä geeniominaisuutena X-kromosomissa (katso tehtävä 207 sivulla 89).

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

243. Millä todennäköisyydellä nopan silmäluku on jaollinen luvulla 2 tai luvulla 3?

244. Kyselyn mukaan 52 % kuntalaisista on tyytyväisiä terveydenhoitoon, 64 % on tyytyväisiä joukkoliikenteeseen ja 36 % on tyytyväisiä sekä terveydenhoitoon että joukkoliikenteeseen. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu kuntalainen on tyytyväinen joukkoliikenteeseen tai terveydenhoitoon?

245. Pakasta nostetaan kolme korttia. Millä todennäköisyydellä kaikki ovat kuvakortteja tai kaikki ovat samaa maata? Kuvakortteja ovat sotamies, kuningatar, kuningas ja ässä.

246. Koulun kahdesta monistuskoneesta toinen on rikki keskimäärin 25 % kouluajasta ja toinen 15 % kouluajasta. Koneet särkyvät toisistaan riippumatta. Millä todennäköisyydellä satunnaisena koulupäivän hetkenä monistuskoneista vain yksi toimii?

247. Kuntakeskukseen kulkee aamulla kaksi bussia. Matti ehtii keskimäärin joka kolmantena kouluaamuna kello 7.30 lähtevään bussiin. Muina aamuina hän lähtee myöhäisemmällä bussilla. Liisa taas ehtii aikaisempaan bussiin keskimäärin joka neljäntenä aamuna. Millä todennäköisyydellä Matti ja Liisa satunnaisena kouluaamuna kohtaavat toisensa samassa bussissa?

248. Valmistusprosessin aikana 12 prosenttiin massatuotteena valmistettavista lasiesineistä jää pieni värivika ja 7 prosenttiin pieni muotovika. Viat syntyvät toisistaan riippumattomasti. Esineet, joissa on toinen vioista, myydään B-laatuna. Esineet, joissa on molemmat viat, särjetään. Virheettömästä lasiesineestä saadaan tuottoa 14 euroa ja B-laatuisesta 6 euroa. Särjettävästä esineestä tulee 50 euroa tappiota. Mikä on yhdestä lasiesineestä saadun tuoton odotusarvo?

249. Jääkiekkosarjan lopputurnauksessa kohtaavat joukkueet SIFK ja UPS. Mestariksi tulee joukkue, joka ensiksi voittaa neljä ottelua. Aikaisemmista keskinäisistä otteluista SIFK on voittanut 60 %. Mikä tämän perusteella on todennäköisyys, että mestaruus ratkeaa neljässä ottelussa? Eri otteluiden tulokset oletetaan toisistaan riippumattomiksi.

250. Kahdesta samannäköisestä kolikosta toinen on tasapainoitettu virheelliseksi niin, että todennäköisyys saada kolikolla kruuna on 0,60. Pelaaja otti kolikoista toisen ja heitti sitä kolmesti. Millä todennäköisyydellä hän sai kolme kruunaa?

251. Rasiassa A on 2 valkoista ja 4 mustaa palloa ja rasiassa B on 3 valkoista ja 2 mustaa palloa. Valitaan rasia umpimähkään ja poimitaan siitä kaksi palloa. Millä todennäköisyydellä
a) molemmat pallot ovat valkoisia
b) pallot ovat samanväriset?

252. Maalivahti torjuu keskimäärin joka kymmenennen rangaistuspotkun. Millä todennäköisyydellä hän seitsemän potkun rangaistuspotkukilpailussa torjuu enintään yhden potkun?

253. Ihmiset kuuluvat johonkin neljästä pääveriryhmästä A, B, AB ja O. Suomalaisista kuuluu A-veriryhmään 44 %, B-ryhmään 17 %, AB-ryhmään 8 % ja O-ryhmään 31 %. Verensiirto on mahdollista samaan veriryhmään kuuluvalle. Lisäksi O-verta voidaan antaa kenelle tahansa, ja AB-ryhmään kuuluva voi vastaanottaa verta keneltä tahansa. Millä todennäköisyydellä aviomiehen veri soveltuu hänen aviovaimolleen? Oletetaan, että vaimo ei ole raskaana, sillä kun raskaana olevalle naiselle siirretään verta, tulee ottaa huomioon myös reesustekijä.

254. Anna ja Maija heittävät vuorotellen noppaa. Voittajaksi tulee se, joka saa ensimmäisenä kuutosen. Millä todennäköisyydellä peli päättyy Annan voittoon ennen neljättä heittokierrosta, jos a) Anna aloittaa b) Maija aloittaa?

255. Kolikkoa heitetään neljästi. Millä todennäköisyydellä heittosarjassa on
a) ainakin kaksi peräkkäistä klaavaa
b) ainakin kaksi peräkkäistä klaavaa tai ainakin kaksi peräkkäistä kruunaa?

256. Noppaa heitetään kuudesti. Mikä on todennäköisyys, että
a) tulee ainakin yksi silmäluku 5 tai ainakin yksi silmäluku 6
b) tulee ainakin yksi silmäluku 5 ja ainakin yksi silmäluku 6?

257. Pakasta vedetään viisi korttia. Mikä on todennäköisyys, että tulee ainakin yksi hertta ja ainakin yksi pata?

258. Pelaaja heittää noppaa kolmesti. Millä todennäköisyydellä silmäluvut suurenevat joka heitolla?

Toistokoe

Ongelma

Noppaa heitetään neljästi. Millä todennäköisyydellä tulee
a) yksi kuutonen b) kaksi kuutosta?

JOHDANTOESIMERKKI 1

Noppaa heitetään a) viidesti b) 15 kertaa. Millä todennäköisyydellä tulee kaksi kuutosta?

Ratkaisu

a) Viiden heiton sarjassa kaksi kuutosta voi tulla heti kahdella ensimmäisellä heitolla tai ensimmäinen kuutonen tulee ensimmäisellä ja toinen kolmannella heitolla tai ensimmäinen kuutonen tulee ensimmäisellä ja toinen neljännellä heitolla jne. Laaditaan luettelo kaikista viiden heiton sarjoista, joissa tulee kaksi kuutosta.

Olkoon A tapahtuma ”heitolla tulee kuutonen”, jolloin vastatapahtuma $\overline{A}$ on ”heitolla ei tule kuutonen”. Tällöin esimerkiksi $\overline{A}A\overline{A}\overline{A}A$ tarkoittaa heittosarjaa: ei kuutonen, kuutonen, ei kuutonen, ei kuutonen, kuutonen.

Viiden heiton sarjat, joissa tulee kaksi kuutosta ovat (”aakkosjärjestyksessä”):

$AA\overline{A}\overline{A}\overline{A}$, $A\overline{A}A\overline{A}\overline{A}$, $A\overline{A}\overline{A}A\overline{A}$, $A\overline{A}\overline{A}\overline{A}A$, $\overline{A}AA\overline{A}\overline{A}$,
$\overline{A}A\overline{A}AA$, $\overline{A}A\overline{A}\overline{A}A$, $\overline{A}\overline{A}AA\overline{A}$, $\overline{A}\overline{A}A\overline{A}A$, $\overline{A}\overline{A}\overline{A}AA$

Heittosarjoja on 10 erilaista. Sarjat ovat toisensa poissulkevat, joten todennäköisyys, että saadaan kaksi kuutosta, on heittosarjojen todennäköisyyksien summa.

$$\mathrm{P}(\text{kaksi kuutosta}) = \mathrm{P}(AA\overline{A}\overline{A}\overline{A}) + \mathrm{P}(A\overline{A}A\overline{A}\overline{A}) + \ldots + \mathrm{P}(\overline{A}\overline{A}\overline{A}AA)$$

Jokaisen heittosarjan todennäköisyys voidaan laskea riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännöllä.

$$P(AA\overline{A}\overline{A}\overline{A}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$P(A\overline{A}A\overline{A}\overline{A}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

jne.

Jokaisen heittosarjan todennäköisyys on tulo, jossa on kaksi tekijää $\frac{1}{6}$ (kuutonen) ja kolme tekijää $\frac{5}{6}$ (ei-kuutonen). Jokaisen heittosarjan todennäköisyys on $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$.

Siis

$$P(\text{kaksi kuutosta}) = P(AA\overline{A}\overline{A}\overline{A}) + P(A\overline{A}A\overline{A}\overline{A}) + \ldots + P(\overline{A}\overline{A}\overline{A}AA)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3}_{\text{10 kappaletta}}$$

$$= 10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}16$$

b) Sellaisia 15 nopanheiton sarjoja, joissa tulee kaksi kuutosta, ovat esimerkiksi

$\overline{A}\overline{A}\overline{A}A\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}AA$ ja $\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}A\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}A$.

Kaikki eri sarjat, joissa tulee kaksi kuutosta, ovat toisensa poissulkevat, joten todennäköisyys, että saadaan kaksi kuutosta, on sarjojen todennäköisyyksien summa. Jokaisen sarjan todennäköisyys on tulo, jossa on kaksi tekijää $\frac{1}{6}$ ja 13 tekijää $\frac{5}{6}$. Jokaisen sarjan todennäköisyys on $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{13}$.

Todennäköisyys saada 15 heitolla kaksi kuutosta saadaan siis kertomalla todennäköisyys $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{13}$ erilaisten sarjojen lukumäärällä.

Päätellään heittosarjojen lukumäärä kombinatorisesti.

15 heiton sarjoissa, jotka tuottavat kaksi kuutosta, on kahdessa paikassa A. Esimerkiksi:

$\overline{A}\overline{A}\overline{A}A\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}A\overline{A}$ Paikoilla 4 ja 14 on A.

$\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}A\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}A$. Paikoilla 7 ja 15 on A.

Niiden kahden paikan, joissa on A, järjestysnumerot muodostavat 15 luvun joukon $\{1, 2, \ldots, 15\}$ kaksialkioisen osajoukon.

15 alkion joukolla on $\binom{15}{2}$ erilaista kahden alkion osajoukkoa.

Sarjojen lukumäärä on $\binom{15}{2} = 105$.

Siis:

P(15 nopanheitolla 2 kuutosta)

$= \binom{15}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{13} = 105 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{13}$

$\approx 0{,}27$

Vastaus a) 0,16 b) 0,27

Toistokoe

Toistetaan samaa satunnaiskoetta ja jokaisella toistolla seurataan, tapahtuuko tapahtuma A. Jos toistot ovat toisistaan riippumattomat, eli A:n todennäköisyys yksittäisessä toistossa ei riipu edeltävien kokeiden tuloksista, on kyseessä *toistokoe*.

Heitetään noppaa ja joka heitolla seurataan, tuleeko kuutonen vai ei. Todennäköisyys saada yhdellä heitolla kuutonen ei riipu aikaisemmista heitoista. Kyseessä on toistokoe.

Pakasta vedetään yksitellen kortteja palauttamatta niitä välillä pakkaan ja joka kerta seurataan, tuleeko hertta vai ei. Todennäköisyys saada yhdellä toistolla hertta riippuu siitä, kuinka aikaisemmissa toistoissa on käynyt. Toistot eivät ole toisistaan riippumattomia. Kyseessä ei ole toistokoe.

Todennäköisyys, että A tapahtuu n toistossa k kertaa

Suoritetaan n-kertainen toistokoe. Oletetaan, että tapahtuma A tapahtuu yksittäisessä kokeessa todennäköisyydellä p. Todennäköisyys, että A tapahtuu n toistossa k kertaa on

$$\mathrm{P}(A \text{ tapahtuu } n \text{ toistossa } k \text{ kertaa}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Jos X on satunnaismuuttuja, joka ilmaisee A:n tapahtumiskertojen lukumäärän n-kertaisessa toistossa, niin on siis

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Kaavassa

n on toistojen lukumäärä
k on A:n tapahtumiskertojen lukumäärä
p on A:n todennäköisyys yksittäisessä kokeessa.

Saatu kaava on niin sanottu *binomitodennäköisyyden* kaava.*

---

* Kaava sisältää myös ääritapaukset ”joka kerta” ja ”ei yhtään kertaa”.

$$\mathrm{P}(A \text{ tapahtuu } n \text{ toistossa } n \text{ kertaa}) = \binom{n}{n} p^n = 1 \cdot p^n = p^n.$$

$$\mathrm{P}(A \text{ tapahtuu } n \text{ toistossa } 0 \text{ kertaa}) = \binom{n}{0} (1-p)^n = 1 \cdot (1-p)^n = (1-p)^n.$$

Perustelu. Binomitodennäköisyyden kaava perustellaan yleistämällä johdantoesimerkin 1 b-kohdan päättely.

Jokaisen sellaisen n-kertaisen toistosarjan todennäköisyys, jossa A tapahtuu k kertaa on riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön nojalla tulo, jossa on k tekijää p ja $n-k$ tekijää $1-p$. Jokaisen sarjan todennäköisyys on $p^k(1-p)^{n-k}$.

Koska toistosarjat ovat toisensa poissulkevat, todennäköisyys, että A tapahtuu k kertaa, saadaan kertomalla yksittäisen sarjan todennäköisyys $p^k(1-p)^{n-k}$ kaikkien niiden sarjojen lukumäärällä, joissa A tapahtuu k kertaa.

Niiden k toiston järjestysnumerot, joissa A tapahtuu, muodostavat joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ k-alkioisen osajoukon. n alkion joukon k-alkioisten osajoukkojen lukumäärä on $\binom{n}{k}$. n-kertaisia toistosarjoja, joissa A tapahtuu k kertaa on siis $\binom{n}{k}$ erilaista, joten

$$\text{P}(A \text{ tapahtuu } n \text{ toistossa } k \text{ kertaa}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

ESIMERKKI 2

Arpajaisissa, joissa arpojen lukumäärä on suuri, 40 % arvoista voittaa. Ostetaan viisi arpaa.

a) Laske, millä todennäköisyydellä tulee 0, 1, 2, 3, 4 ja 5 voittoa. Havainnollista todennäköisyysjakaumaa graafisesti.

b) Millä todennäköisyydellä tulee enintään kaksi voittoa?

Ratkaisu

a) Koska arpojen lukumäärä on suuri ja ostetaan vain viisi arpaa, niin yksittäisen arvan voittotodennäköisyys ei käytännössä riipu siitä, voittivatko aikaisemmat arvat vai eivät. Viiden arvan ostoa voidaan siis pitää viisinkertaisena toistokokeena. Todennäköisyys saada voittoarpa yksittäisessä toistossa on 0,4.

Olkoon satunnaismuuttuja X voittoarpojen lukumäärä. Satunnaismuuttujan X mahdollisten arvojen 0 (yksikään arpa ei voita) ja 5 (kaikki arvat voittavat) todennäköisyydet voidaan laskea riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännöllä.

Arvojen 1, 2 ja 3 todennäköisyydet lasketaan kaavalla

$$P(X = k) = \binom{5}{k} \cdot 0{,}4^k \cdot 0{,}6^{5-k}.$$

Kaavaan $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ sijoitetaan toistojen lukumäärä $n = 5$ ja $p = 0{,}4$.

Saadaan:

$$P(X = 0) = 0{,}6^5 \approx 0{,}078$$

$$P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^4 = 5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 \approx 0{,}26$$

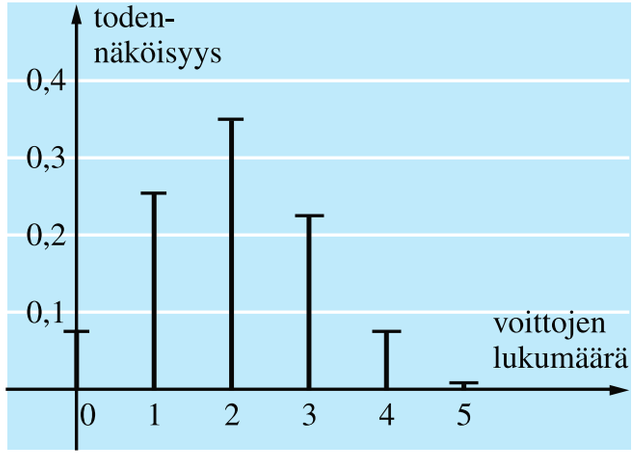
$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 = 10 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 \approx 0{,}35$$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 = 10 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 \approx 0{,}23$$

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^1 = 5 \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6 \approx 0{,}077$$

$$P(X = 5) = 0{,}4^5 \approx 0{,}010$$

Todennäköisyysjakaumaa voidaan havainnollistaa janakuviolla. Vaaka-akselilla on voittojen lukumäärä ja pystyakselilla todennäköisyys.



b) Voittoja tulee enintään kaksi, jos niitä tulee 0, 1 tai 2. Vaihtoehdot ovat toisensa poissulkevat, joten

$$P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$= 0{,}6^5 + 5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 + 10 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 \approx 0{,}68.$$

Vastaus

a) P(0 voittoa) ≈ 0,078, P(1 voitto) ≈ 0,26, P(2 voittoa) ≈ 0,35, P(3 voittoa) ≈ 0,23, P(4 voittoa) ≈ 0,077, P(5 voittoa) ≈ 0,010
b) 0,68

ESIMERKKI 3

Lentokoneeseen, jossa on tilaa 60 matkustajalle, on myyty 63 matkalippua. Tiedetään, että lentomatkan varanneista noin 95 % saapuu varaamalleen vuorolle. Millä todennäköisyydellä paikat riittävät?

Ratkaisu

Paikat riittävät, jos 63:sta matkan varanneesta saapuu enintään 60, eli 0 tai 1 tai ... tai 59 tai 60. Näiden kaikkien vaihtoehtojen todennäköisyyksien laskeminen on työlästä. Ensin kannattaa laskea todennäköisyys vastatapahtumalle ”paikat eivät riitä”, eli 63 matkustajasta saapuu 61 tai 62 tai kaikki 63.

Olkoon satunnaismuuttuja X saapuvien matkustajien lukumäärä. Todennäköisyys, että yksittäinen matkustaja saapuu on 0,95. Todennäköisyys, että k matkustajaa 63:sta saapuu on

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{63}{k} \cdot 0{,}95^k \cdot 0{,}05^{63-k}.$$

Kaavaan $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ sijoitetaan $n = 63$ ja $p = 0{,}95$.

Siis

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{paikat eivät riitä}) &= \mathrm{P}(X > 60)\\ &= \mathrm{P}(X = 61) + \mathrm{P}(X = 62) + \mathrm{P}(X = 63)\\ &= \binom{63}{61} \cdot 0{,}95^{61} \cdot 0{,}05^2 + \binom{63}{62} \cdot 0{,}95^{62} \cdot 0{,}05^1 + 0{,}95^{63}\\ &\approx 0{,}38.\end{aligned}$$

Kysytty todennäköisyys on

$$\mathrm{P}(\text{paikat riittävät}) = 1 - \mathrm{P}(\text{paikat eivät riitä}) \approx 1 - 0{,}38 = 0{,}62.$$

Vastaus

0,62

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

259. Arvioidaan, että Englannin valioliigan jalkapallo-otteluista 47 % päättyy kotivoittoon. Mikä on todennäköisyys, että Englannin valioliigan otteluihin perustuvassa oikeassa veikkausrivissä (13 ottelua) on tasan seitsemän ykköstä (kotivoittoa)?

260. Noppaa heitetään neljästi. Laske todennäköisyydet saada 0, 1, 2, 3 ja 4 kuutosta. Havainnollista todennäköisyysjakaumaa graafisesti.

261. Arpajaisissa, joissa arpojen lukumäärä on suuri, joka kolmas arpa voittaa. Mikä on todennäköisyys, että kuudella arvalla tulee kaksi voittoa?

262. Myyjäisten arpajaisissa on jäljellä 12 arpaa, joista neljä on voittoarpoja. Mikä on todennäköisyys, että kuudella arvalla tulee kaksi voittoa?

263. Millä todennäköisyydellä a) nelilapsisessa b) kahdeksanlapsisessa perheessä on yhtä monta tyttöä ja poikaa? Syntyvistä lapsista 51,2 % on poikia.

264. Sääennusteen mukaan säätyyppi pysyy koko lomaviikon samanlaisena. Sateen todennäköisyys joka päivä on 0,3. Millä todennäköisyydellä lomaviikon (7 päivää) aikana sataa enintään kolmena päivänä?

265. Hedelmät pakataan 20 kappaleen pakkauksiin. Tukkuostaja palauttaa pakkaukset, joissa on enemmän kuin kaksi viallista hedelmää. Tiedetään, että hedelmistä noin 5 % on viallisia. Kuinka monta prosenttia pakkauksista voidaan arvioida tulevan palautetuiksi?

266. Tilaisuuden järjestäjä tietää kokemuksesta, että yksittäinen kutsuttu vieras saapuu paikalle muista vieraista riippumatta todennäköisyydellä 0,90. Millä todennäköisyydellä 45 kutsutulle varatut 42 lautasta riittävät?

267. Miehistä 8 % ja naisista 0,6 % on punavihersokeita. Millä todennäköisyydellä oppilasryhmässä, jossa on 15 poikaa ja 17 tyttöä, on vähintään kaksi punavihersokeaa?

268. Pelissä heitetään kolmea kolikkoa. Jos tulee kolme kruunaa, Aino saa 5 euroa, kahdesta kruunasta hän saa 3 euroa ja yhdestä kruunasta yhden euron. Jos tulee pelkkiä klaavoja, Aino joutuu maksamaan 15 euroa. Kannattaako Ainon pelata peliä?

269. Noppaa heitetään, kunnes tulee toinen kuutonen. Millä todennäköisyydellä vähemmän kuin 13 heittoa riittää?

270. Todennäköisyys, että tapahtuma A tapahtuu erään toistokokeen kahdessa toistossa yhden kerran, on 0,46. Mikä on A:n todennäköisyys yksittäisessä toistossa?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

271. Noppaa heitetään 18 kertaa. Millä todennäköisyydellä tulee kolme kuutosta?

272. Neljää kolikkoa heitetään. Laske todennäköisyydet saada 0, 1, 2, 3 ja 4 kruunaa. Havainnollista todennäköisyysjakaumaa graafisesti.

273. Kunnan asukkaista joka neljäs kannattaa moottoritien rakentamista. Millä todennäköisyydellä heidän osuutensa on sama arvalla valitussa kahdeksan hengen otoksessa?

274. Yhdistyksen 40 jäsenestä joka neljäs kannattaa jäsenmaksun korottamista. Millä todennäköisyydellä heidän osuutensa on sama arvalla valitussa kahdeksan hengen otoksessa?

275. Koe koostuu kymmenestä kysymyksestä, joissa jokaisessa on kaksi vastausvaihtoehtoa. Hyväksymiseen vaaditaan, että vähintään kahdeksan vastauksista on oikein. Millä todennäköisyydellä kokeesta pääsee läpi arvaamalla?

276. Rengastetuista kanahaukoista tavataan myöhemmin 15 %. Millä todennäköisyydellä 20 rengastetusta poikasesta tavataan myöhemmin ainakin kolme?

277. Kolikkoa heitetään 60 kertaa. Millä todennäköisyydellä klaavojen lukumäärä on
a) 30 b) 29 – 31?

278. Anja ja Bengt pelaavat seuraavin säännöin: Heitetään neljää rahaa. Jos ainakin yksi on kruuna, Anja maksaa Bengtille kruunien lukumäärän osoittaman euromäärän. Jos kruunia ei ole yhtään, Bengt maksaa Anjalle ennalta sovitun rahamäärän. Kuinka suureksi Anjan kannattaa tämä rahamäärä sopia, jotta hän voisi luottaa jäävänsä voitolle koko yön jatkuvan pelaamisen jälkeen?

279.

Elossa olevia 1 000 vastasyntynyttä kohden

ikä	miehiä	naisia
0	1000	1000
20	986	992
40	951	979
60	801	922
80	294	551

Laske taulukon perusteella todennäköisyys, että synnytyssairaalassa eräänä päivänä syntyneistä 14 lapsesta, joista kahdeksan on tyttöjä ja kuusi poikia, ainakin a) kaksi b) kolme saavuttaa 80 vuoden iän.

280. Viesti lähetetään binäärimuodossa jonona nollia ja ykkösiä. Viesti saattaa välittyä virheellisenä: todennäköisyys, että nolla vaihtuu ykköseksi on 0,06, ja todennäköisyys, että ykkönen vaihtuu nollaksi on 0,02. Millä todennäköisyydellä 12 merkin viestiin 011000101001 tulee enintään yksi virhe?

281. Todennäköisyys, että tapahtuma A tapahtuu erään toistokokeen neljässä toistossa kaksi kertaa, on 0,24. Mikä on A:n todennäköisyys yksittäisessä toistossa?

282. Todennäköisyys, että tapahtuma A tapahtuu erään toistokokeen kolmessa toistossa yhden kerran on 0,21. Mikä on todennäköisyys, että A tapahtuu
a) kuudessa toistossa kaksi kertaa
b) 12 toistossa neljä kertaa?

283. Palloilusarjan loppuotteluissa kohtaavat joukkueet BIFK ja SPK. Mestaruuteen tarvitaan neljän ottelun voitto. Joukkueiden aikaisemmista keskinäisistä otteluista BIFK on voittanut 55 %. Laske tämän perusteella todennäköisyys, että mestariksi tulee BIFK.

284. A ja B heittävät kolikkoa. A saa pisteen klaavasta ja B kruunasta. Pelin voittaa se, joka ensiksi saa 10 pistettä. 13 kierroksen jälkeen A:lla on 6 ja B:llä 7 pistettä. Millä todennäköisyydellä A voittaa pelin?

Diskreetti tilastollinen jakauma

JOHDANTOESIMERKKI 1

a) Selvitä arvosanojen jakauma. Mikä kurssiarvosana on kaikkein yleisin?
b) Laske kurssiarvosanojen keskiarvo.
c) Havainnollista arvosanojen jakaumaa sopivalla tilastokuviolla eli diagrammilla.

Suvikummun lukio

Oppiaine: Pitkä matematiikka
Kurssi: Todennäköisyys ja tilastot

Oppilas	Arvosana	Oppilas	Arvosana
Alava, Outi	6	Ngyen, The Phu	8
Bergroth, Matti	9	Nieminen, Antti	7
Erkkilä, Erik	9	Niskala, Tommi	10
Forsberg, Tiina	8	Nurmio, Laura	6
Heikkilä, Lauri	8	Oksala, Antti	8
Hentunen, Juha	4	Rantala, Sari	8
Holopainen, Hannu	7	Salo, Hannu	4
Honkaniemi, Kaari	8	Samad, Mohammed	7
Kananen, Jari	8	Tammi, Sini	7
Kiiski, Ismo	7	Timonen, Tatjana	9
Kokkila, Sari	10	Tonttila, Maria	6
Kuosmanen, Hanni	6	Toropainen, Marco	4
Kurki, Sari	9	Tuominen, Jessica	6

Ratkaisu

a) Laaditaan taulukko jokaisen mahdollisen arvosanan esiintymiskertojen lukumäärästä eli *frekvenssistä*.

arvosana		frekvenssi
10	//	2
9	////	4
8	~~////~~ //	7
7	~~////~~	5
6	~~////~~	5
5		0
4	///	3
		26

Taulukko on niin sanottu *frekvenssitaulukko*. Taulukosta ilmenee arvosanojen *absoluuttinen jakauma* eli jokaisen arvosanan lukumäärä.

Jakaumaa voidaan paremmin vertailla muihin vastaaviin jakaumiin, jos selvitetään *suhteellinen jakauma*. Lasketaan jokaisen arvosanan *suhteellinen frekvenssi* eli frekvenssin suhde kaikkien havaintojen lukumäärään. Suhteellinen frekvenssi ilmaistaan yleensä prosentteina.

Arvosanan 10 suhteellinen frekvenssi on $\frac{2}{26} \approx 0{,}08 = 8\ \%$.

Arvosanan 9 suhteellinen frekvenssi on $\frac{4}{26} \approx 0{,}15 = 15\ \%$ jne.

arvosana	frekvenssi %
10	8
9	15
8	27
7	19
6	19
5	0
4	12
	100

Jakaumasta ilmenee, että yleisin arvosana on 8. Arvosana 8 on arvosanojen tyyppiarvo eli moodi.

b) Keskiarvo on kaikkien annettujen arvosanojen summa jaettuna arvosanojen lukumäärällä.

Keskiarvo voidaan laskea eri tavoilla.

Tapa 1. Kaikki 26 arvosanaa lasketaan yhteen.

$$\frac{6+9+9+8+8+4+7+8+8+7+10+6+9+8+7+10+6+8+8+4+7+7+9+6+4+6}{26}$$

$$= \frac{189}{26} \approx 7{,}3$$

Tapa 2. Käytetään hyväksi frekvenssitaulukkoa ja lasketaan arvosanojen summa niin, että jokainen arvosana kerrotaan frekvenssillään.

$$\frac{2 \cdot 10 + 4 \cdot 9 + 7 \cdot 8 + 5 \cdot 7 + 5 \cdot 6 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{26} = \frac{189}{26} \approx 7{,}3$$

Tapa 3. Keskiarvo voidaan laskea myös suhteellisten frekvenssien avulla.

$$\frac{8 \cdot 10 + 15 \cdot 9 + 27 \cdot 8 + 19 \cdot 7 + 19 \cdot 6 + 0 \cdot 5 + 12 \cdot 4}{100} = \frac{726}{100} \approx 7{,}3$$

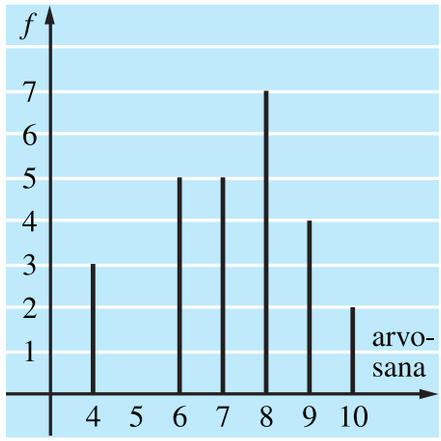
tai

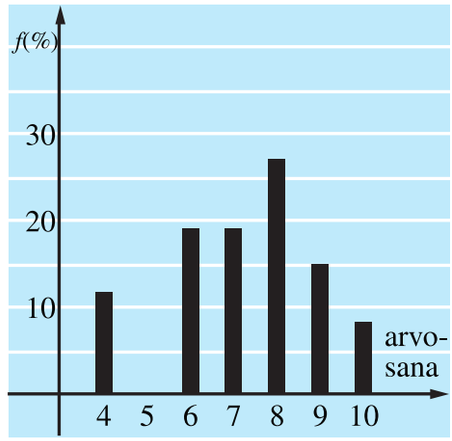
$$0{,}08 \cdot 10 + 0{,}15 \cdot 9 + 0{,}27 \cdot 8 + 0{,}19 \cdot 7 + 0{,}19 \cdot 6 + 0 \cdot 5 + 0{,}12 \cdot 4 \approx 7{,}3$$

c) Havainnollistetaan arvosanojen absoluuttista jakaumaa janakuviolla ja suhteellista jakaumaa pylväskuviolla.

Janakuviossa jokaisen arvosanan kohdalle piirretään jana, jonka korkeus vastaa frekvenssiä tai suhteellista frekvenssiä.

Pylväskuviossa jokaisen muuttujan arvon kohdalle piirretään erillinen, yhtä leveä pylväs.





Vastaus a) tyyppiarvo 8 b) keskiarvo 7,3

Diskreetti tilastollinen muuttuja

Tilastollisissa tutkimuksissa tutkitaan *tilastollisen muuttujan* jossain *havaintoaineistossa* saamien arvojen jakaumaa. Tällöin voidaan tutkia sekä *absoluuttista* eli *määrällistä jakaumaa* että *suhteellista jakaumaa*.

Edellisessä esimerkissä muuttujana oli kurssiarvosana. Esimerkissä tutkittiin muuttujan arvojen jakaumaa pitkän matematiikan kurssin opetusryhmässä.

Tilastollinen muuttuja, jonka mahdollisten arvojen joukko on äärellinen joukko, on *diskreetti* tilastollinen muuttuja.

Diskreettejä muuttujia ovat esimerkiksi koearvosanat tai sisarusten lukumäärät.

Pituus ja ikä ovat esimerkkejä muuttujista, jotka eivät ole diskreettejä, sillä pituus ja ikä voivat periaatteessa olla mitä tahansa reaalilukuja joltain väliltä.

Tilastollisen muuttujan jakaumaa kuvaillaan erilaisilla tilastollisilla tunnusluvuilla, kuten moodilla ja keskiarvolla.

Tyyppiarvo eli moodi

Tilastollisen muuttujan *tyyppiarvo* eli *moodi* havaintoaineistossa on yleisimmin esiintyvä muuttujan arvo.

Keskiarvo

Tilastollisen muuttujan *keskiarvo* havaintoaineistossa on havaintoarvojen summa jaettuna havaintojen lukumäärällä.

Jos havaintoarvojen lukumäärä on n ja havaintoarvot ovat $x_1, x_2, \ldots, x_n$, niin havaintoarvojen keskiarvo on

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Keskiarvoa on merkitty symbolilla $\bar{x}$. Merkintä $\sum_{i=1}^{n} x_i$ on lyhennetty merkintä havaintoarvojen summalle. Summan symbolina käytetty $\sum$ on kreikan aakkosten iso sigma.

Keskiarvon laskeminen frekvenssitaulukosta

Frekvenssitaulukosta havaintojen summa lasketaan niin, että jokainen muuttujan arvo kerrotaan frekvenssillään ja tulot lasketaan yhteen.

muuttuja x	frekvenssi f
x_1	f_1
x_2	f_2
...	...
x_k	f_k
	yhteensä n

Keskiarvo on

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + ... + f_k \cdot x_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{n}.$$

Keskiarvo voidaan laskea myös suhteellisten frekvenssien avulla.

$$\bar{x} = \frac{f_1}{n} \cdot x_1 + \frac{f_2}{n} \cdot x_2 + ... + \frac{f_k}{n} \cdot x_k$$

Keskiarvon laskeminen laskimella

Laskimissa on tilastotoimintoja, jotka otetaan käyttöön näppäimellä STAT tai vastaavalla näppäimellä. Useimpiin laskimiin voidaan syöttää frekvenssitaulukko kahtena listana tms. Tilastotoiminnot ovat laskimesta riippuen varsin erilaisia, ja ne selviävät parhaiten laskimen käsikirjasta.

JOHDANTOESIMERKKI 2

Eija ja Eero ovat kumpikin suorittaneet samat kymmenen pakollista pitkän matematiikan kurssia. Laske molemmille kurssiarvosanojen keskiarvo. Vertaa arvosanojen hajontaa.

kurssi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Eija	6	8	6	9	10	8	9	10	8	6
Eero	8	8	8	7	8	9	8	7	8	9

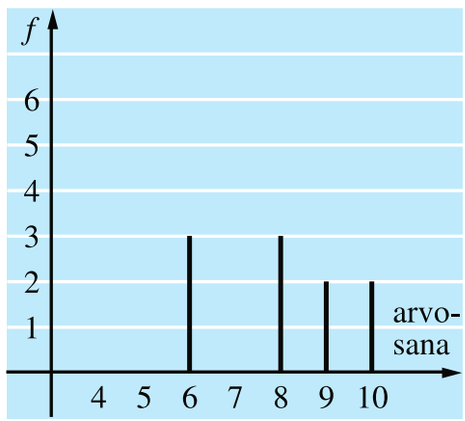
Ratkaisu

Lasketaan keskiarvot.

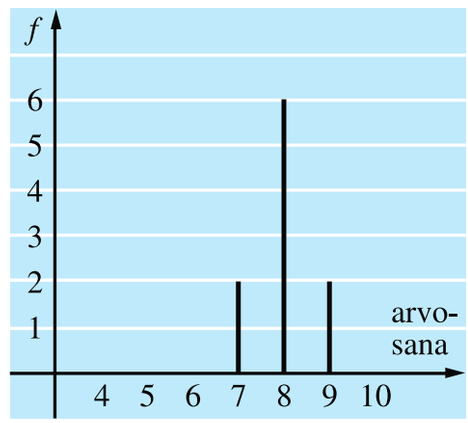
$$\text{Eija: } \frac{6+8+6+9+10+8+9+10+8+6}{10} = \frac{80}{10} = 8$$

$$\text{Eero: } \frac{8+8+8+7+8+9+8+7+8+9}{10} = \frac{80}{10} = 8$$

Keskiarvot ovat yhtä suuret, mutta Eeron arvosanat ovat keskittyneet lähelle keskiarvoa, kun taas Eijan arvosanat ovat enemmän hajallaan.



Eijan arvosanajakauma



Eeron arvosanajakauma

Etsitään keino ilmaista hajonta lukuarvona. Tätä varten lasketaan kurssiarvosanojen poikkeamat keskiarvosta.

kurssi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Eija	−2	0	−2	1	2	0	1	2	0	−2
Eero	0	0	0	−1	0	1	0	−1	0	1

Yleisimmin hajonnan mittana käytetään keskihajontaa. Keskihajonta on poikkeamien neliöiden keskiarvon neliöjuuri.*

Lasketaan Eijan arvosanojen poikkeamien neliöiden keskiarvo.

$$\frac{(-2)^2 + 0^2 + (-2)^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + (-2)^2}{10} = \frac{22}{10} = 2{,}2$$

Eijan arvosanojen keskihajonta on $s = \sqrt{2{,}2} \approx 1{,}48$.

Lasketaan Eeron arvosanojen poikkeamien neliöiden keskiarvo.

$$\frac{0^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2}{10} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

Eeron arvosanojen keskihajonta on $s = \sqrt{0{,}4} \approx 0{,}63$.

Vastaus

Eijan arvosanojen hajonta on suurempi.
Keskihajonnat ovat: Eija 1,48, Eero 0,63.

---

* Hajonnan mittana käytetään joskus myös poikkeamien itseisarvojen keskiarvoa eli *keskipoikkeamaa*. Eijan arvosanojen keskipoikkeama on $\frac{12}{10} = 1{,}2$ ja Eeron arvosanojen $\frac{4}{10} = 0{,}4$. Keskihajonta on käytetympi hajontaluku matemaattisten ominaisuuksiensa takia.

Keskihajonta

Havaintoarvojen hajonnan mittalukuna käytetään keskihajontaa.

Keskihajonta s on keskiarvosta laskettujen poikkeamien neliöiden keskiarvon neliöjuuri.

Kun lasketaan havaintoarvojen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ keskihajonta, niin ensin lasketaan havaintoarvojen keskiarvosta $\bar{x}$ laskettujen poikkeamien

$x_1 - \bar{x}, \; x_2 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}$

neliöiden keskiarvo eli niin sanottu *varianssi*

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Varianssi on poikkeamien neliöiden summa jaettuna havaintojen lukumäärällä.

Keskihajonta on varianssin neliöjuuri.

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

Keskihajonnan laskeminen frekvenssitaulukosta

Frekvenssitaulukosta keskihajonta lasketaan niin, että jokainen poikkeaman neliö $(x_i - \bar{x})^2$ kerrotaan frekvenssillään f_i.

muuttuja x	frekvenssi f
x_1	f_1
x_2	f_2
...	...
x_k	f_k
	yhteensä n

Varianssi (keskihajonnan neliö) on

$$s^2 = \frac{f_1 \cdot (x_1 - \bar{x})^2 + f_2 \cdot (x_2 - \bar{x})^2 + ... + f_k \cdot (x_k - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Keskihajonta on

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

Laskimeen syötetystä havaintoaineistosta keskihajonta saadaan laskimesta riippuen tavallisimmin näppäimellä σ, σ_n tai s_n.*

---

* Laskimissa on myös toinen hajontanäppäin, yleensä s, σ_{n-1} tai s_{n-1}. Kyseessä on niin sanottu *otoskeskihajonta*, jonka laskukaava eroaa keskihajonnan kaavasta niin, että jakajana on havaintojen lukumäärän n sijasta $n - 1$. Otoskeskihajontaa käytetään silloin, kun tilastollisen muuttujan keskihajontaa jossain suuressa joukossa arvioidaan joukosta poimitun otoksen avulla. Otoskeskihajonta liittyy syvällisempiin tilastotieteen menetelmiin, joihin ei tällä kurssilla perehdytä. Kahdesta laskimen antamasta hajontaluvusta varsinainen keskihajonta on pienempi (jakaja n on suurempi kuin jakaja $n - 1$). Tätä havaintoa voi käyttää hyväksi, jos on epävarma, kumpi laskimen hajontanäppäin antaa varsinaisen keskihajonnan.

ESIMERKKI 3

Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2004

7 (L)	6 (E)	5 (M)	4 (C)	3 (B)	2 (A)	0 (I)
11 %	24 %	25 %	18 %	13 %	6 %	3 %

Lähde: Aatos Lahtinen, Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2004, Dimensio 6/2004

Ylioppilaskokeessa käytetään perinteisiä latinankielisiä arvosanoja.* Kun tutkitaan arvosanojen jakaumaa, arvosanoille annetaan taulukon mukaiset numeeriset arvot.

Laske arvosanojen keskiarvo ja keskihajonta.

Ratkaisu

Keskiarvo ja keskihajonta voidaan laskea laskimen tilastotoiminnoilla käyttämällä prosenttilukuja frekvensseinä.

Keskiarvo ja keskihajonta voidaan laskea myös taulukoimalla.

Taulukkoon lasketaan sarakkeita vasemmalta oikealle edeten.

Kolmannen sarakkeen summasta lasketaan keskiarvo: $\bar{x} = \frac{469}{100} \approx 4{,}7$.

x_i	f_i (%)	$f_i \cdot x_i$	poikkeama keskiarvosta $x_i - \bar{x}$	poikkeaman neliö $(x_i - \bar{x})^2$	poikkeaman neliö kerrottuna frekvenssillä $f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$	
7	11	77	2,3	5,29	$11 \cdot 5{,}29 =$	58,19
6	24	144	1,3	1,69	$24 \cdot 1{,}69 =$	40,56
5	25	125	0,3	0,09	$25 \cdot 0{,}09 =$	2,25
4	18	72	–0,7	0,49	$18 \cdot 0{,}49 =$	8,82
3	13	39	–1,7	2,89	$13 \cdot 2{,}89 =$	37,57
2	6	12	–2,7	7,29	$6 \cdot 7{,}29 =$	43,74
0	3	0	–4,7	22,09	$3 \cdot 22{,}09 =$	66,27
	100	469				257,40

* Arvosanat ovat laudatur (L), eximia cum laude approbatur (E), magna cum laude approbatur (M), cum laude approbatur (C), lubenter approbatur (B), approbatur (A) ja improbatur (I). Suomeksi arvosanat ovat kiitettävä, erittäin suurin kiitoksin hyväksytty, suurin kiitoksin hyväksytty, kiitoksin hyväksytty, mielihyvin hyväksytty, hyväksytty ja hylätty.

Viimeisen sarakkeen summa on poikkeamien neliöiden summa.

Poikkeamien neliöiden keskiarvo on $\frac{257{,}4}{100} = 2{,}574$.

Keskihajonta on $s = \sqrt{2{,}574} \approx 1{,}6$.

Vastaus keskiarvo 4,7, keskihajonta 1,6

Tilastollisen muuttujan keskiarvo voidaan tulkita erikoistapaukseksi satunnaismuuttujan odotusarvosta.* Myös tilastollisen muuttujan keskihajonnalla on yleisempi vastine todennäköisyyslaskennassa.

Satunnaismuuttujan keskihajonta

Olkoot $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ja $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vastaavasti näiden arvojen todennäköisyydet.

Merkitään satunnaismuuttujan X odotusarvoa $\mathrm{E}(X) = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$ kirjaimella μ (kreikan aakkosten pikku myy).

Satunnaismuuttujan X keskihajonnan neliö (satunnaismuuttujan *varianssi*) on

$$\mathrm{D}^2(X) = p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \ldots + p_n(x_n - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - \mu)^2.$$

Keskihajonta on

$$\mathrm{D}(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - \mu)^2}.$$

Kun lasketaan satunnaismuuttujan keskihajonta, niin satunnaismuuttujan jokaisen arvon odotusarvosta lasketun poikkeaman neliö kerrotaan muuttujan arvon todennäköisyydellä ja lasketaan tulojen summa. Keskihajonta on summan neliöjuuri.

---

* Ilmaistaan keskiarvo suhteellisten frekvenssien avulla:

$$\bar{x} = \frac{f_1}{n} \cdot x_1 + \frac{f_2}{n} \cdot x_2 + \ \ldots\ + \frac{f_k}{n} \cdot x_k.$$

Havaintoarvojen kertoimet $\frac{f_1}{n}$, $\frac{f_2}{n}$ jne. voidaan tulkita todennäköisyyksiksi.

Esimerkiksi kerroin $\frac{f_1}{n}$ on todennäköisyys, että havaintoaineistosta satunnaisesti poimitulla havainnolla on arvo x_1. Keskiarvo $\bar{x}$ on siis satunnaismuuttujan X = ”havaintoaineistoista poimitun satunnaisen havainnon arvo” odotusarvo.

ESIMERKKI 4

Sivulla 73 esimerkissä 2 tutkittiin seuraavaa satunnaismuuttujaa:

X = pilaantuneiden kananmunien lukumäärä, kun otetaan kolme kananmunaa rasiasta, jossa on kuusi tuoretta ja neljä pilaantunutta munaa.

Esimerkissä selvitettiin satunnaismuuttujan X jakauma ja laskettiin odotusarvo $\mathrm{E}(X) = 1{,}2$. Laske satunnaismuuttujan X keskihajonta.

lukumäärä	todennäköisyys
0	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{30}$

Ratkaisu

Lasketaan ensin keskihajonnan neliö. Satunnaismuuttujan X jokaisen arvon odotusarvosta lasketun poikkeaman neliö kerrotaan arvon todennäköisyydellä ja tulot lasketaan yhteen.

$$\mathrm{D}^2(X) = \frac{1}{6}(0 - 1{,}2)^2 + \frac{1}{2}(1 - 1{,}2)^2 + \frac{3}{10}(2 - 1{,}2)^2 + \frac{1}{30}(3 - 1{,}2)^2$$

$$= 0{,}56$$

Keskihajonta on

$$\mathrm{D}(X) = \sqrt{0{,}56} \approx 0{,}75.$$

Vastaus

0,75

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

285. Erkki tutki, kuinka monta sanomalehteä opetusryhmän oppilaiden koteihin oli tilattu. Hän sai selville, että neljään kotiin ei tullut yhtään lehteä, 12 kotiin tuli yksi lehti, viiteen kotiin kaksi, kahteen kolme ja yhteen viisi sanomalehteä. Tietoa ei saatu seitsemältä oppilaalta.
a) Määritä sanomalehtien lukumäärän suhteellinen jakauma.
b) Mikä on sanomalehtien lukumäärän tyyppiarvo ja keskiarvo?
c) Havainnollista jakaumaa sopivalla diagrammilla.

286. Taulukossa on Suvikummun lukiossa lukuvuonna 2004–2005 annettujen kurssiarvosanojen suhteellinen jakauma.
a) Mikä oli kurssiarvosanojen tyyppiarvo?
b) Laske kurssiarvosanojen keskiarvo.

Suvikummun lukio

Kurssiarvosanat lv. 2004–2005

arvosana	frekvenssi %
10	9
9	20
8	24
7	17
6	12
5	6
4	12
	100

287. Sama matematiikan koe pidettiin kahdelle ryhmälle, joista ensimmäisessä oli 36 oppilasta ja toisessa 24. Kokeen keskiarvot ryhmissä olivat 7,53 ja 7,92. Mikä oli kokeen keskiarvo kaikkien kokeeseen osallistuneiden joukossa?

288. Kuntien palveluksessa olevien naispuolisten erikoislääkäreiden keskimääräinen kuukausiansio vuonna 2004 oli 5 444 euroa ja kaikkien erikoislääkäreiden 5 814 euroa. Naisten osuus lääkäreistä oli 55,4 %. Mikä mieslääkäreiden keskiansio oli?

289. Laske matematiikan kurssiarvosanojen
8, 9, 6, 8, 8, 9, 7, 9, 10, 8
keskiarvo ja keskihajonta.

290.
Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2004

7 (L)	6 (E)	5 (M)	4 (C)	3 (B)	2 (A)	0 (I)
2 %	8 %	16 %	23 %	23 %	15 %	13 %

Lähde: Aatos Lahtinen, Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2004, Dimensio 6/2004

Laske arvosanojen keskiarvo ja keskihajonta.

291. Ostetaan neljä arpaa arpajaisissa, joissa arpojen lukumäärä on suuri ja 30 % arvoista voittaa. Olkoon satunnaismuuttuja X saatujen voittoarpojen lukumäärä. Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo ja keskihajonta.

292. Ostetaan neljä arpaa myyjäisten arpajaisissa. Arpoja on jäljellä 10, joista kolme on voittoarpoja. Olkoon satunnaismuuttuja X saatujen voittoarpojen lukumäärä. Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo ja keskihajonta.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

293. Määritä, jos mahdollista, tyyppiarvo ja keskiarvo.

a)

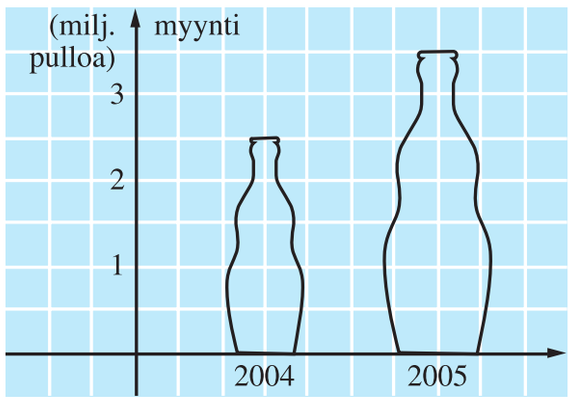
perheen lapsiluku	f
0	11
1	25
2	18
3	9
4	4
5	2

b)

nuorisoleirin osanottajan äidinkieli	f
englanti	12
ruotsi	5
saksa	9
suomi	4

294.

Uutuusjuoma Kupla kasvattaa myyntiään.



Kuviossa on esimerkki harhaanjohtavasta diagrammista.

a) Kuinka monta prosenttia juoman myynti on lisääntynyt?

b) Vuoden 2005 diagrammia piirrettäessä kuvion kaikkia mittoja on kasvatettu samassa suhteessa. Katsojalle mielikuva kasvusta välittyy kuvion pinta-aloista. Kuinka monta prosenttia myynti näyttää lisääntyneen?

295. Yksityisen sektorin palveluksessa olevista oikeustieteen kandidaateista oli vuonna 2004 57,4 % miehiä. Miesten keskimääräinen kuukausisansio oli 5 324 euroa ja naisten 4 337 euroa. Mikä oli oikeustieteen kandidaattien keskimääräinen kuukausiansio?

296. Kuntien palveluksessa olevien ekonomien keskimääräinen kuukausiansio vuonna 2004 oli 3 404 euroa. Naisekonomien keskiansio oli 3 246 euroa ja miesekonomien 3 634 euroa. Kuinka monta prosenttia kuntien palveluksessa olevista ekonomeista oli naisia?

297. a) Määritä muuttujan x suhteellinen jakauma.

b) Laske muuttujan x tyyppiarvo, keskiarvo ja keskihajonta.

c) Havainnollista jakaumaa sopivalla diagrammilla.

muuttuja x	frekvenssi
5	12
4	23
3	27
2	18
1	4
0	8

298. Kahta erilaista optista mittalaitetta testattiin niin, että kymmenen koehenkilöä mittasi molemmilla laitteilla 2,70 cm:n paksuisen metallilevyn paksuuden. Mittaustulokset olivat:

Laite A:	2,65	2,51	2,59	2,74	2,63
	2,75	2,63	2,60	2,66	2,70
Laite B:	2,79	2,69	2,76	2,89	2,79
	2,71	2,41	2,55	2,93	2,45

Laske molempien mittaussarjojen keskiarvo ja keskihajonta. Mitä tunnusluvut kertovat laitteista?

299. Havaintoarvojen $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ painoilla $w_1,\ w_2, \ldots, w_n$ *painotettu keskiarvo* on

$$\frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}.$$

Jokainen havaintoarvo kerrotaan painollaan, tulot lasketaan yhteen ja summa jaetaan painojen summalla. Painotettua keskiarvoa voidaan käyttää esimerkiksi arvosanoja laskettaessa, jos eri osasuorituksien halutaan vaikuttavan kokonaisarvosanaan eri tavoin. Laske matematiikan kurssiarvosanojen 10, 10, 10, 10, 8, 9, 10, 7, 6 ja 5 painotettu keskiarvo, kun neljän ensimmäisen kurssin paino on 1, kolmen seuraavan 2 ja kolmen viimeisen 3. Vertaa painotettua keskiarvoa tavalliseen keskiarvoon.

300. Koneen valmistama osa on kelvollinen todennäköisyydellä 0,81, korjattava todennäköisyydellä 0,12 ja kelvoton todennäköisyydellä 0,07. Jokaisesta kelvollisesta osasta saadaan tuottoa 80 euroa ja korjattavasta korjauksen aiheuttamien lisäkustannusten jälkeen 50 euroa. Kelvottomasta osasta tulee 40 euroa tappiota. Olkoon satunnaismuuttuja X yhden osan tuotto. Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo ja keskihajonta.

301. On lähetettävä maailman ääriin postipakettina kaksi lahjatavaraa, joiden arvot ovat 50 euroa ja 30 euroa. Todennäköisyys, että paketti katoaa matkalla on 0,1. Määritä satunnaismuuttujan X odotusarvo ja keskihajonta, kun

a) X on katoamisesta aiheutuva tappio, kun lahjat lähetetään samassa paketissa

b) X on katoamisesta aiheutuva tappio, kun lahjat lähetetään eri paketeissa.

Jatkuva tilastollinen jakauma

JOHDANTOESIMERKKI 1

Kyselyssä tiedusteltiin lukion aloittaneiden oppilaiden kotien pinta-aloja. Vastauksina saatiin seuraavat neliömetrimäärät:

45, 51, 74, 71, 32, 102, 78, 89, 95, 88, 80, 74, 81, 77, 89, 105, 90, 108, 125, 58, 59, 85, 87, 70, 66, 65, 80, 74, 69, 46, 67, 74, 67, 54, 54, 76, 77, 37, 78, 68, 64, 87, 82, 85, 63, 59, 60, 71, 62, 63, 100

Lisäksi kahdeksan lukiolaista ei tiennyt kotinsa pinta-alaa, ja 12 jätti vastaamatta kyselyyn.

a) Luokittele pinta-alat sopiviin luokkiin ja määritä pinta-alojen suhteellinen jakauma.

b) Mikä on keskimääräinen pinta-ala?

c) Havainnollista pinta-alojen jakaumaa sopivalla diagrammilla.

Ratkaisu

a) Sopivan luokittelun valitseminen kannattaa aloittaa etsimällä havaintoaineiston pienin ja suurin havainto. Pienin pinta-ala on $32\ \text{m}^2$ ja suurin $125\ \text{m}^2$. Luokiksi valitaan tasalevyiset luokat 30–49, 50–69 jne.

Luokitellusta aineistosta laaditaan frekvenssitaulukko. Oppilaat, joilta tietoa ei saatu, jätetään laskuista pois.

pinta-ala (m^2)	frekvenssi	suhteellinen frekvenssi (%)
30– 49	4	8
50– 69	17	33
70– 89	23	45
90–109	6	12
110–129	1	2
	51	100

b) Riittävän hyvä arvio keskimääräiselle pinta-alalle saadaan, kun lasketaan keskiarvo luokitellusta aineistosta.

Keskiarvon laskemista varten jokaista luokkaa edustamaan valitaan yksi luku, luokkakeskus. Luokkakeskus on luokan todellisten rajojen keskiarvo.

Pinta-ala on pyöristetty neliömetrin tarkkuuteen normaaleilla pyöristyssäännöillä, joten esimerkiksi luokan 30–49 todellinen alaraja on 29,5 ja todellinen yläraja 49,5. Luokkakeskus on $(29{,}5 + 49{,}5) : 2 = 39{,}5$.

Frekvenssitaulukko täydennetään luokkakeskuksilla.

pinta-ala (m^2)	luokka-keskus	frekvenssi	suhteellinen frekvenssi (%)
30– 49	39,5	4	8
50– 69	59,5	17	33
70– 89	79,5	23	45
90–109	99,5	6	12
110–129	119,5	1	2
		51	100

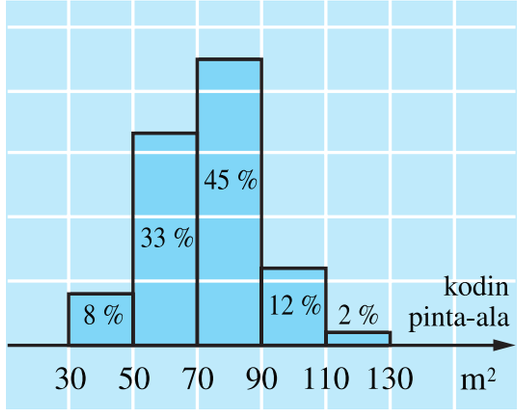
Keskiarvo lasketaan luokkakeskuksien avulla.

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot 39{,}5 + 17 \cdot 59{,}5 + 23 \cdot 79{,}5 + 6 \cdot 99{,}5 + 1 \cdot 119{,}5}{51} \approx 73$$

Jos 51 oppilaan keskiarvo 73 m^2 yleistetään koskemaan kaikkia 71 oppilasta, joudutaan olettamaan, että puuttuvien 20 oppilaan kotien pinta-ala on myös keskimäärin 73 m^2. Tämä heikentää tuloksen luotettavuutta.

c) Luokiteltua havainto-aineistoa havainnollistetaan histogrammilla.

Histogrammissa kunkin luokan todellisen ala- ja ylärajan väliin piirretään pylväs, jonka pinta-ala vastaa suhteellista frekvenssiä. Jos luokat ovat tasalevyiset, kuten ne tässä esimerkissä ovat, myös pylväiden korkeudet vastaavat suhteellisia frekvenssejä.



Vastaus

b) 73 m^2

Jatkuva tilastollinen muuttuja

Tilastollinen muuttuja, joka voi saada mitä tahansa arvoja joltain väliltä, on *jatkuva tilastollinen muuttuja*.

Jatkuvia tilastollisia muttujia ovat esimerkiksi pituus ja ikä. Myös rahalla mitattua hintaa voidaan pitää jatkuvana muuttujana.

Luokittelu ja luokkakeskus

Jatkuvia tilastollisia muuttujia käsitellään luokiteltuina. Kun luokitellusta aineistosta lasketaan jakauman keskiarvoa ja keskihajontaa, niin jokaista luokkaa edustamaan valitaan *luokkakeskus*. Luokkakeskus on luokan todellisten rajojen keskiarvo. Luokkakeskusta määritettäessä on tiedettävä, kuinka havaintoarvoja on aineistoa kerättäessä ja luokiteltaessa pyöristetty.

Histogrammi

Jatkuvan tilastollisen muuttujan jakaumaa havainnollistetaan *histogrammilla*. Histogrammi muodostuu toisissaan kiinni olevista pylväistä, joiden rajat ovat luokan todellisten rajojen kohdalla. Pylvään pinta-ala vastaa luokan suhteellista frekvenssiä.

ESIMERKKI 2

Taulukossa on Suvikummun kouluissa työskentelevien opettajien ikäjakauma.

a) Mikä opettajien keski-ikä on?

b) Havainnollista ikäjakaumaa histogrammilla.

ikä (vuotta)	frekvenssi %
20–29	12
30–49	45
50–64	43

Ratkaisu

a) Koska ikä ilmaistaan alaspäin pyöristettynä kokonaislukuna, luokkien todelliset rajat ovat 20, 30, 50 ja 65 vuotta. Luokkakeskukset ovat todellisten rajojen keskiarvot 25, 40 ja 57,5. Opettajien keski-ikä on

$$\bar{x} = 0{,}12 \cdot 25 + 0{,}45 \cdot 40 + 0{,}43 \cdot 57{,}5 \approx 45{,}7.$$

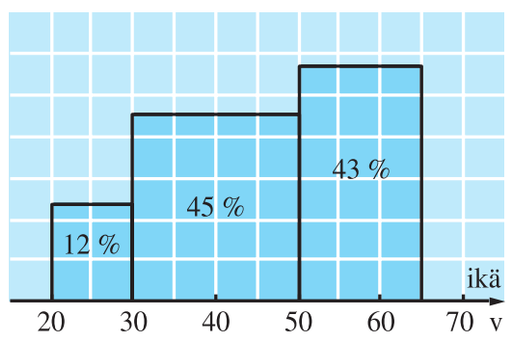
b) Histogrammin pylväiden pinta-alat kuvaavat luokan suhteellista frekvenssiä. Luokat eivät ole yhtä leveät. Lasketaan pylväiden korkeudet.

Välille [20, 30] tulevan pylvään leveys on 10 yksikköä ja pinta-ala 12 yksikkköä. Pylvään korkeus on $\frac{12}{10} = 1{,}2$ yksikköä.

Välille [30, 50] tulevan pylvään korkeus on $\frac{45}{20} = 2{,}25$ yksikköä.

Välille [50, 65] tulevan pylvään korkeus on $\frac{43}{15} \approx 2{,}87$ yksikköä.

Valitaan pylvään korkeudelle sopiva yksikkö ja piirretään histogrammi. Kuviossa pylvään korkeuden yksiköksi on valittu kaksi ruutuväliä.



Vastaus

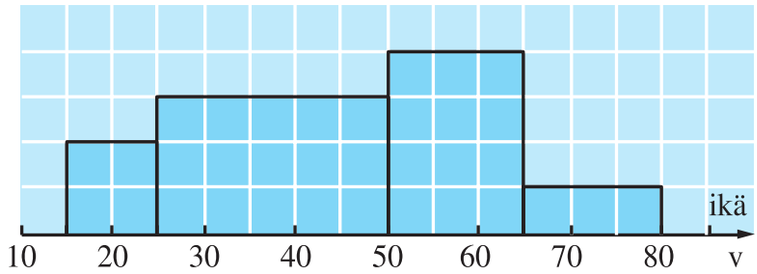
a) 45,7 vuotta

ESIMERKKI 3

Liikuntatapahtumaan osallistuneiden iät luokiteltiin neljään luokkaan ja ikäjakaumaa havainnollistettiin histogrammilla.

a) Mitä luokkia käytettiin, ja mitkä olivat luokkien suhteelliset frekvenssit? Kokoa tiedot frekvenssitaulukkoon.

b) Tapahtuman sponsori palkitsee yhden arvalla valitun osallistujan. Arvioi histogrammin avulla, millä todennäköisyydellä palkinnon saaja on alle 30-vuotias.



Ratkaisu

a) Pylväiden rajat ovat luokkien todellisten rajojen kohdalla. Luokkaan, jonka rajat ovat 15 ja 25 vuotta, kuuluvat ne, joiden ikä on 15–24 vuotta. Muut ikäluokat ovat 25–49, 50–64 ja 65–79 vuotta.

Pylväiden pinta-alat vastaavat luokkien suhteellisia frekvenssejä. Luokan suhteellinen frekvenssi on yhtä suuri kuin luokan kohdalle piirretyn pylvään pinta-alan suhde koko histogrammin pinta-alaan.

Koko histogrammin pinta-ala on

$2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 34$ ruutua.

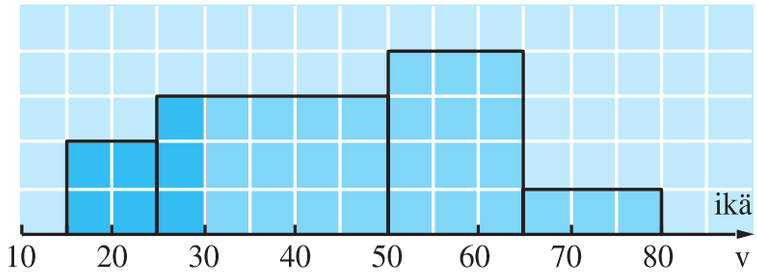
Pylväiden pinta-alat ovat $2 \cdot 2 = 4$, $5 \cdot 3 = 15$, $3 \cdot 4 = 12$ ja $3 \cdot 1 = 3$ ruutua. Lasketaan luokkien suhteelliset frekvenssit.

ikä (vuotta)	suhteellinen frekvenssi
15–24	$\frac{4}{34} \approx 0{,}12 = 12\ \%$
25–49	$\frac{15}{34} \approx 0{,}44 = 44\ \%$
50–64	$\frac{12}{34} \approx 0{,}35 = 35\ \%$
65–79	$\frac{3}{34} \approx 0{,}09 = 9\ \%$

b) Kohdan 30 vasemmalla puolella olevan histogrammin osan pinta-ala on $2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7$ ruutua. Alle 30-vuotiaiden osuus kaikista osallistujista on

$$\frac{7}{34} \approx 0{,}21 = 21\ \%.$$

Pinta-alan 7 suhde koko histogrammin pinta-alaan.



Todennäköisyys, että arvalla valittu osallistuja on alle 30-vuotias, on 0,21.

Vastaus

a)

ikä (vuotta)	frekvenssi %
15–24	12
25–49	44
50–64	35
65–79	9

b) 0,21

ESIMERKKI 4

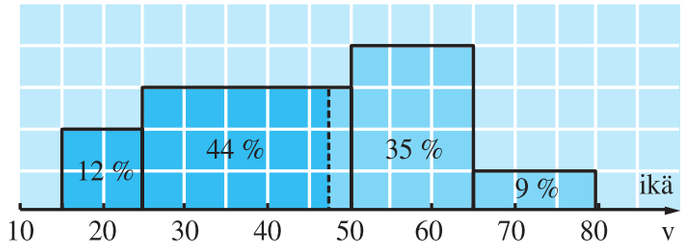
a) Määritä ikä, jota nuorempia olivat puolet edellisen esimerkin liikuntatapahtuman osallistujista.
b) Minkä ikäisiä olivat nuorimmat 25 % osallistujista? Entä minkä ikäinen oli osallistujien vanhin neljännes?

ikä (vuotta)	frekvenssi %
15–24	12
25–49	44
50–64	35
65–79	9

Ratkaisu

a) On määritettävä ikä, jonka alapuolelle (ja siis myös yläpuolelle) jää 50 % osallistujista. Ikää sanotaan ikäjakauman mediaaniksi.

Koska alle 50-vuotiaita oli 12 % + 44 % = 56 % osallistujista, mediaani-ikä on jossain luokan 25–49 yläpäässä. Histogrammissa mediaani-ikä on se kohta, jonka molemmille puolille jää puolet histogrammin pinta-alasta.

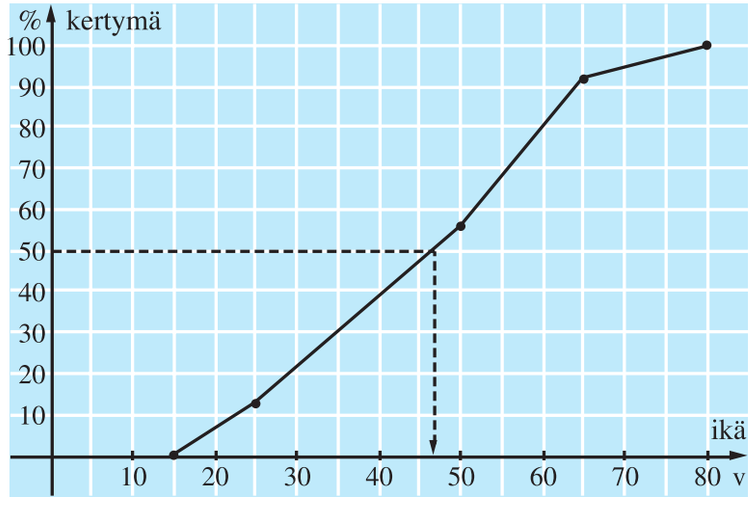


Määritetään arvio mediaani-ialle niin sanotun *kertymäkuvaajan* avulla.

Taulukoidaan suhteellisten frekvenssien kertymä käyttäen todellisia luokkarajoja.

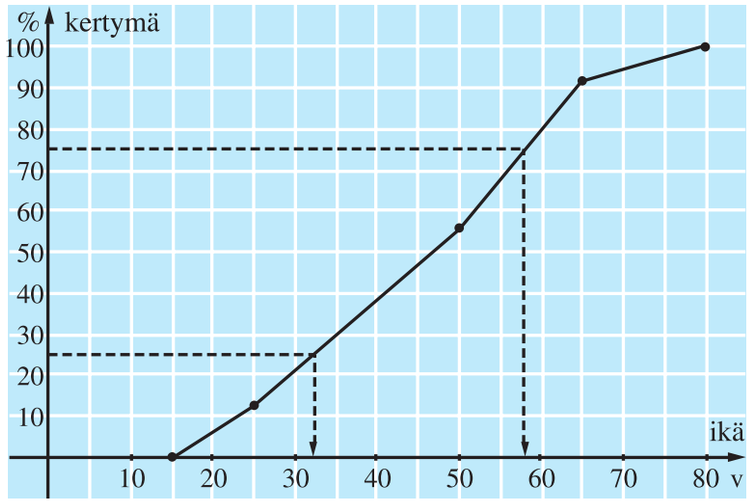
ikä (vuotta)	kertymä
alle 15	0 %
alle 25	12 %
alle 50	12 % + 44 % = 56 %
alle 65	56 % + 35 % = 91 %
alle 80	91 % + 9 % = 100 %

Piirretään kertymäkuvaaja koordinaatistoon, jonka vaaka-akselilla on ikä ja pystyakselilla suhteellisten frekvenssien kertymä.



Kuvaaja ylittää 50 %:n rajan 47 vuoden kohdalla. Iän mediaani on siis noin 47 vuotta.

b)



Kuvaaja ylittää 25 %:n rajan 32 vuoden kohdalla, joten nuorimmat 25 % osallistujista olivat 32-vuotiaita tai nuorempia.

Kuvaaja ylittää 75 %:n rajan 58 vuoden kohdalla. Osallistujien vanhin neljännes muodostui vähintään 58-vuotiaista.

Vastaus

a) 47 vuotta
b) 32-vuotiaita tai nuorempia, vähintään 58-vuotiaita

Kertymä

Piirtämällä jakauman kertymäkuvaaja voidaan arvioida, kuinka suuri osa jakaumasta jää kunkin kohdan alapuolelle.

Kertymäkuvaajasta voidaan myös määrittää kohtia, joiden ala- tai yläpuolelle jää tietty osa jakaumasta. Kohta, jonka alapuolelle (ja myös yläpuolelle) jää puolet havainnoista, on havaintoaineiston *mediaani*.*

* Kohtia, jotka jakavat jakauman neljään yhtä suureen osaan, kutsutaan *kvartiileiksi*. Edellisessä esimerkin liikuntatapahtumaan osallistuneiden kvartiili-iät olivat 32 vuotta, 47 vuotta ja 58 vuotta. Kohtia, jotka jakavat jakauman viiteen yhtä suureen osaan, kutsutaan *kvintiileiksi* ja kohtia, jotka jakavat jakauman kymmeneen yhtä suureen osaan, kutsutaan *desiileiksi*. Yleisnimitys kaikille tällaisille erityiskohdille on *fraktiili*.

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

302. a) Missä luokassa on eniten pakkauksia (*tyyppiarvoluokka*)?
b) Laske pakkausten massan keskiarvo.
c) Määritä suhteellinen jakauma ja havainnollista jakaumaa histogrammilla.

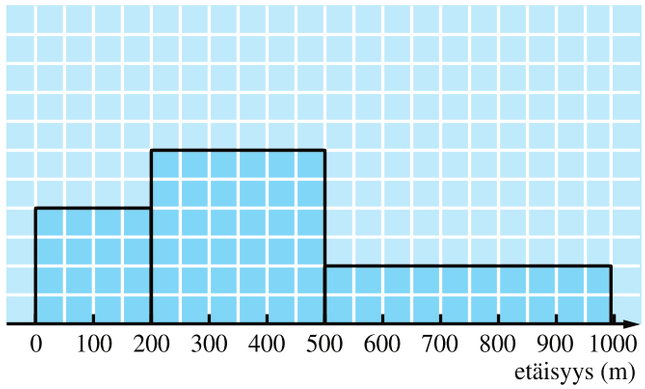
pakkauksen massa g	frekvenssi
340–344	8
345–349	14
350–354	18
355–359	5

303. Taulukossa on Suvikummun päiväkotien lasten lukumäärät iän mukaan.
a) Määritä luokkien todelliset rajat ja luokkakeskukset.
b) Laske lasten keski-ikä.

ikä (vuotta)	lapsia
0–1	48
2–4	145
5–6	109

304. Laadi edellisen tehtävän taulukon perusteella Suvikummun päiväkotien lasten suhteellinen ikäjakauma. Havainnollista jakaumaa histogrammilla.

305. Tutkimuksessa selvitettiin Suvikummun kotitalouksien etäisyyttä lähimmästä linja-autopysäkistä. Etäisyyden jakaumaa havainnollistettiin histogrammilla.
a) Laske kunkin luokan suhteelliset frekvenssit. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitun suvikumpulaisen etäisyys linja-autopysäkistä on
b) alle 300 m
c) yli 600 m
d) 300 m–600 m?



306. Taulukossa on perinnekulttuuritapahtumaan osallistuneiden ikäjakauma.

ikä (vuotta)	frekvenssi %
0–19	12
20–49	28
50–69	41
70–89	19

Piirrä jakauman kertymäkuvaaja. Vastaa seuraaviin kysymyksiin kertymäkuvaajan avulla.
a) Mikä oli osallistujien mediaani-ikä?
b) Minkä ikäisistä muodostuivat osallistujien nuorin ja vanhin neljännes?

307. Mikä suomalaisten keski-ikä oli vuonna 1850?

Suomalaisten ikäjakauma vuonna 1850
(Lähde: Suomen tilastollinen vuosikirja)

ikä	%
0– 4	13,9
5–14	20,6
15–24	17,7
25–44	27,1
45–64	16,3
65–74	3,4
75–89	1,0
90–	0,0
	100,0

308. Piirrä histogrammi suomalaisten ikäjakaumasta vuonna 1850.

309. Piirrä kertymäkuvaaja suomalaisten ikäjakaumasta vuonna 1850. Selvitä kuvaajasta:
a) Mikä suomalaisten mediaani-ikä oli vuonna 1850?
b) Minkä ikäisiä olivat vuonna 1850 nuorimmat 25 % suomalaisista? Entä minkä ikäinen suomalaisten vanhin neljännes oli?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

310. Pehmolelu Ky:n kirjanpitäjä lajitteli maksamattomat laskut viiteen nippuun:

alle 25 €	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 //
25– 49,99 €	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 //
50– 99,99 €	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 /
100–199,99 €	𝍸 //
200–399,99 €	///

Kuinka paljon rahaa arviolta tarvitaan laskujen maksamiseen?

311. Tilastomies Tikkasella oli tapana kirjata, kuinka monta täyttä minuuttia hän joutui odottamaan metrojunaa.

metrojunan odotus (täydet minuutit)

1 2 1 4 2 4 2 3 3 1 0 4 3 0 1 1 0 2 4 3 2 0 4 0 0
2 4 3 3 1 1 2 1 2 0 4 4 4 0 4 0 1 0 0 3 1 4 3 4 2

a) Järjestä aineisto frekvenssitaulukoksi.
b) Mikä on luokan ”3 täyttä minuuttia” luokkakeskus?
c) Laske odotusajan keskiarvo ja keskihajonta.

312. Taulukossa on jalkapalloturnaukseen osallistuneiden ikäjakauma.
a) Mikä oli osallistuneiden keski-ikä?
b) Havainnollista jakaumaa histogrammilla.

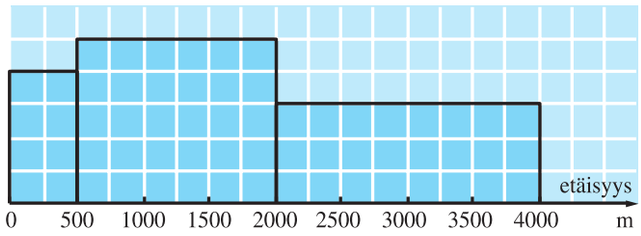
ikä (vuotta)	frekvenssi %
6– 8	15
9–13	40
14–16	33
17–18	12

313. Tutkimuksessa selvitettiin Suvikummun keskustaajaman kotitalouksien etäisyyttä lähimmästä päivittäistavaramyymälästä. Etäisyyden jakaumaa havainnollistettiin histogrammilla. Olkoon satunnaismuuttuja X satunnaisesti valitun kotitalouden etäisyys lähimmästä päivittäistavaramyymälästä. Määritä todennäköisyys

a) $P(X < 1\,000)$

b) $P(X > 1\,500)$

c) $P(1\,000 < X < 1\,500)$.



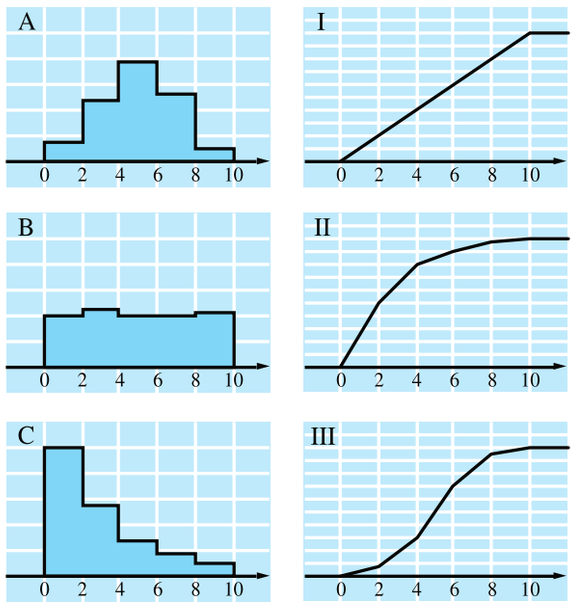
314. a) Laadi edellisen tehtävän jakauman frekvenssitaulukko.

b) Piirrä jakauman kertymäkuvaaja ja määritä kuvaajasta jakauman mediaani.

315. a) Mikä kertymäkuvaaja liittyy histogrammiin?

b) Määritä jokaisen jakauman mediaani.

c) Määritä jokaisesta jakaumasta todennäköisyys, että aineistosta satunnaisesti valitun havainnon arvo on pienempi kuin 6.



316. Mikä suomalaisten keski-ikä oli vuonna 2004? Oleta, että vähintään 90-vuotiaat ovat keskimäärin 94-vuotiaita.

Suomalaisten ikäjakauma vuonna 2004
(Lähde: Tilastokeskus)

ikä	%
0– 4	5,4
5–14	12,1
15–24	12,4
25–44	26,3
45–64	28,0
65–74	8,6
75– 89	6,7
90–	0,5
	100,0

317. Piirrä histogrammi suomalaisten ikäjakaumasta vuonna 2004. Viimeisen avoimen luokan ylärajaksi voit olettaa 100 vuotta. Vertaa tehtävän 308 histogrammiin.

318. Piirrä kertymäkuvaaja suomalaisten ikäjakaumasta vuonna 2004. Selvitä kuvaajasta:

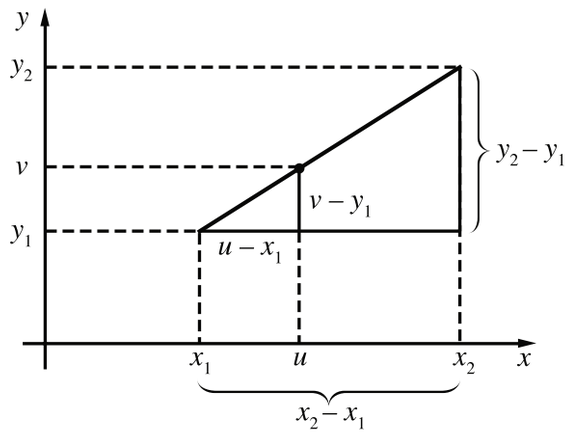
a) Mikä suomalaisten mediaani-ikä oli vuonna 2004?

b) Minkä ikäisiä olivat vuonna 2004 nuorimmat 25 % Suomen väestöstä? Entä minkä ikäinen oli suomalaisten vanhin neljännes?

Vertaa tuloksia tehtävän 309 tuloksiin.

319. Kun tehtävänä on määrittää luokitellusta havaintoaineistosta kertymän suuruuksia luokkarajojen välissä tai kun on määritettävä mediaani tai muita vastaavia kohtia, niin tehtävän voi ratkaista myös laskemalla kertymäkuvaajaa piirtämättä.

Oletetaan, että kertymä luokan $[x_1, x_2]$ alarajalla x_1 on y_1 ja ylärajalla x_2 vastaavasti y_2. Jos (u, v) on jokin kertymäkuvaajan piste tämän luokan kohdalla, niin yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhtälö $\dfrac{v - y_1}{u - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



a) Ratkaise yhtälöstä v.

b) Oletetaan, että kertymä luokan $[10, 25]$ alarajalla on $32\ \%$ ja ylärajalla $57\ \%$. Mikä kertymä on arvon 15 kohdalla?

c) Ratkaise yhtälöstä u.

d) Määritä b-kohdan jakauman mediaani.

320. Egyptin ja Ruotsin väestö iän mukaan, %
(Egypti 1996, Ruotsi 2002)

	Egypti	Ruotsi
0 –14	37,7	18,4
15–29	27,6	18,2
30–44	18,6	20,8
45–64	12,7	25,4
65–	3,4	17,2

Ratkaise edellisen tehtävän menetelmällä ilman kertymäkuvaajaa:

a) Kuinka monta prosenttia Egyptin ja Ruotsin väestöstä on alle 20-vuotiaita?

b) Mikä maan väestön mediaani-ikä on?

c) Minkä ikäinen väestön vanhin viidennes on?

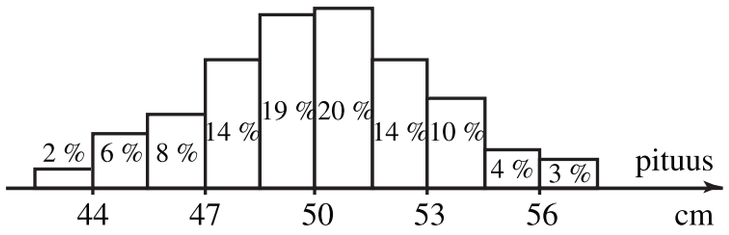
Normaalijakauma

Ongelma 1

Päättele histogrammista, millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitun Suvikummussa vuonna 2004 syntyneen tyttövauvan syntymäpituus on

a) 47 cm–53 cm

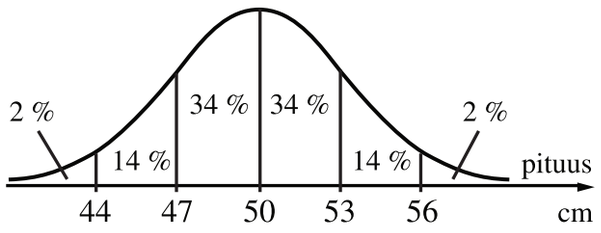
b) pienempi kuin 47 cm.



Tyttövauvojen pituusjakauma Suvikummussa vuonna 2004

Ongelma 2

Suomessa syntyvien tyttövauvojen syntymäpituuden keskiarvo on 50 cm ja keskihajonta 3 cm. Lisäksi tyttövauvojen pituus noudattaa likimain ns. normaalijakaumaa, jossa yhden keskihajonnan pituisilla väleillä on kuvion mukaiset osuudet havainnoista.



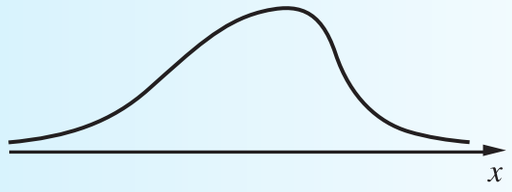
Olkoon satunnaismuuttuja X satunnaisesti valitun tyttövauvan syntymäpituus. Määritä a) $P(47 \leqslant X \leqslant 53)$ b) $P(X \leqslant 47)$ c) $P(X \geqslant 47)$.

Jatkuva satunnaismuuttuja

Satunnaismuuttuja, jonka mahdollisten arvojen joukko on lukusuoran väli, on *jatkuva satunnaismuuttuja*.

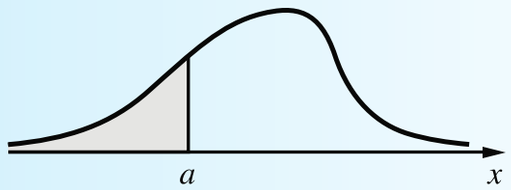
Jatkuvana satunnaismuuttujana voidaan esimerkiksi pitää satunnaisesti valitun 17-vuotiaan suomalaisnaisen pituutta.

Jatkuvan satunnaismuuttujan X jakaumaa kuvaa x-akselin yläpuolella oleva käyrä, joka rajaa x-akselin kanssa alueen, jonka pinta-ala on 1. Funktio, jonka kuvaaja käyrä on, on satunnaismuuttujan *tiheysfunktio.*

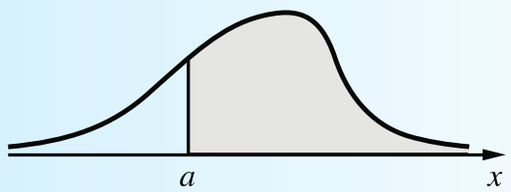


Satunnaismuuttujan X todennäköisyydet ovat tiheysfunktion kuvaajakäyrän ja x-akselin eri väleillä rajaamia pinta-aloja.* Yksittäiset tiheysfunktion arvot eivät kuvaa todennäköisyyksiä.

Todennäköisyys $P(X \leqslant a)$ on kohdan $x = a$ vasemmalle puolelle rajautuva pinta-ala.



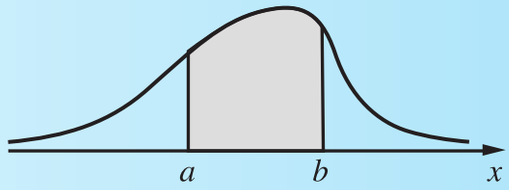
Todennäköisyys $P(X \geqslant a)$ on kohdan $x = a$ oikealle puolelle rajautuva pinta-ala. Koska koko käyrän rajaama pinta-ala on 1, niin



$$P(X \geqslant a) = 1 - P(X \leqslant a).$$

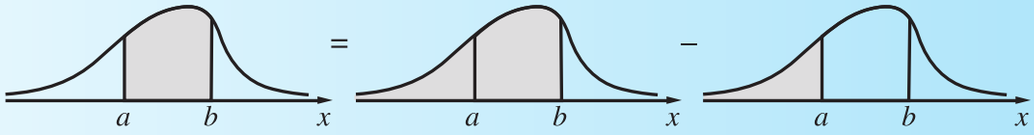
* Käyrä on siis luonteeltaan kuin histogrammin reunaviiva.

Todennäköisyys $P(a \leqslant X \leqslant b)$ on välille $[a, b]$ rajautuva pinta-ala.



Kuvio havainnollistaa, että

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a).$$



Jos $a = b$, niin välille $[a, b]$ rajautuvan alueen pinta-ala on nolla. Siis satunnaismuuttujan X *pistetodennäköisyydet* ovat nollia.

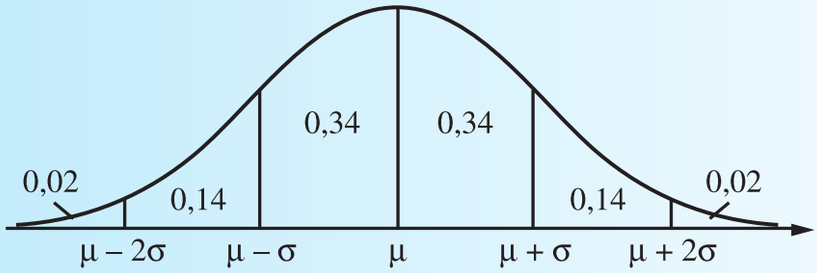
$$P(X = a) = 0 \text{ kaikilla } a$$

Koska pistetodennäköisyydet ovat nollia, niin todennäköisyydet $P(a \leqslant X \leqslant b)$, $P(a < X < b)$, $P(a \leqslant X < b)$ ja $P(a < X \leqslant b)$ ovat kaikki keskenään yhtä suuria.

Tärkein esimerkki jatkuvasta jakaumasta on normaalijakauma.

Normaalijakauma

Monien jatkuvien satunnaismuuttujien jakauma noudattaa ainakin likimain kuvion mukaista niin sanottua *normaalijakaumaa*. Kuviossa μ on jakauman odotusarvo ja σ (kreikan pikku sigma) jakauman keskihajonta.



Jos satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa, ja satunnaismuuttujan X odotusarvo on μ ja keskihajonta σ, niin kuvion mukaan esimerkiksi $P(\sigma - \mu \leqslant X \leqslant \sigma + \mu) = 0{,}34 + 0{,}34 = 0{,}68$. Siis todennäköisyys, että muuttujan X arvo poikkeaa odotusarvosta vähemmän kuin yhden keskihajonnan verran on $0{,}68$.

Normaalijakauma on symmetrinen odotusarvon μ suhteen.

Normaalijakauman käyrää kutsutaan usein *Gaussin käyräksi* tai muotonsa perusteella *kellokäyräksi* (kirkonkello).*

Normaalijakauma on tärkein jatkuvista todennäköisyysjakaumista, sillä siihen päädytään usein muiden todennäköisyysjakaumien raja-arvona. Myös monien muuttujien kokeellisesti havaittu jakauma noudattaa likimain normaalijakaumaa. Tällaisia muuttujia ovat esimerkiksi eräät mittausvirheet, tuotteen painon ja koon vaihtelu sarjatuotannossa, jotkin ihmisten (ja muiden eliöiden) ominaisuudet kuten pituus Belgian miespuolisessa aikuisväestössä.

---

* Käyrä on normaalijakauman tiheysfunktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ kuvaaja.

Lausekkeessa potenssin kantaluku $e \approx 2{,}718$ on niin sanottu Neperin luku. Neperin lukuun tutustutaan kurssissa Juuri- ja logaritmifunktiot.

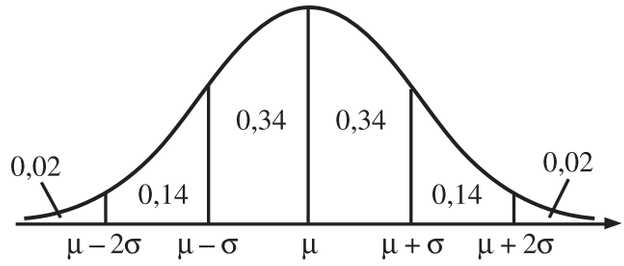
ESIMERKKI 1

Jokaisessa ikäluokassa samaa sukupuolta olevien suomalaisten pituus noudattaa likimain normaalijakaumaa. Kahdeksantoistavuotiaiden tyttöjen pituuden keskiarvo on 165 cm ja keskihajonta 6,0 cm. Kuinka monta prosenttia tämän ikäluokan tytöistä on pitempiä kuin 153 cm?

Ratkaisu

Käytetään hyväksi kuvioon merkittyjä kaikille normaalijakaumille päteviä pinta-aloja.

Lasketaan, kuinka monen keskihajonnan $\sigma = 6{,}0$ cm verran ja mihin suuntaan arvo 153 cm poikkeaa keskiarvosta $\mu = 165$ cm.



Arvo 153 cm poikkeaa keskiarvosta alaspäin 12 cm eli 2 keskihajontaa:

$$\frac{153 - 165}{6{,}0} = \frac{-12}{6{,}0} = -2$$

Arvon 153 poikkeama keskiarvosta jaettuna keskihajonnalla.

Siis $153 \text{ cm} = 165 - 2 \cdot 6{,}0 = \mu - 2\sigma$. Kuvion mukaan todennäköisyys, että satunnaisesti valitun tytön pituus on yli 153 cm, on $1 - 0{,}02 = 0{,}98$. Pituus on yli 153 cm 98 %:lla 18-vuotiaista tytöistä.

Vastaus

98 %

Edellinen esimerkki havainnollistaa, miten normaalijakaumassa on oleellista selvittää, kuinka monen keskihajonnan verran ja mihin suuntaan muuttujan arvo poikkeaa keskihajonnasta.

Normittaminen

Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa odotusarvona μ ja keskihajontana σ.

Satunnaismuuttujan X arvoa x vastaava *normitettu arvo* on

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Poikkeama odotusarvosta jaettuna keskihajonnalla.

Normitettu arvo z ilmaisee, kuinka monen keskihajonnan verran ja mihin suuntaan arvo x poikkeaa odotusarvosta μ.

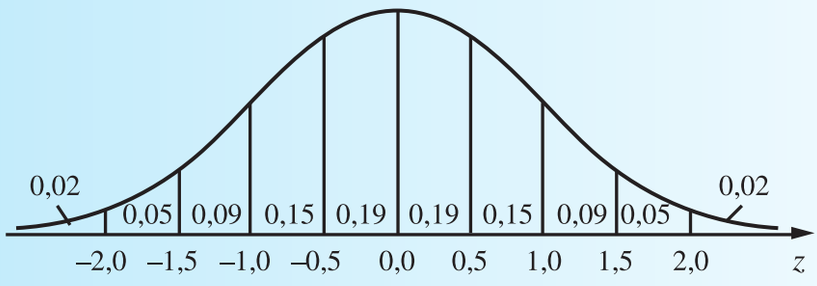
Esimerkiksi odotusarvoa μ vastaava normitettu arvo on 0, arvoa $\mu + \sigma$ vastaava normitettu arvo on 1 ja arvoa $\mu - 2\sigma$ vastaava -2.*

Normitettu normaalijakauma

Jos x on jokin normaalijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan X arvo ja $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ vastaava normitettu arvo, niin

$$P(X \leqslant x) = P(Z \leqslant z),$$

missä satunnaismuuttuja Z noudattaa *normitettua normaalijakaumaa* eli *standardinormaalijakaumaa*. Normitetun normaalijakauman odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1.



* Normittamisessa on siis kyse asteikkomuutoksesta, jossa x-akselin origoksi vaihdetaan kohta μ ja uudeksi yksiköksi keskihajonta σ.

Todennäköisyyttä $P(Z \leqslant z)$ on tapana merkitä $\Phi(z)$. Funktio Φ (kreikan iso fii) on normitetun normaalijakauman niin sanottu *kertymäfunktio*.*

$$\Phi(z) = P(Z \leqslant z)$$

Edellisen sivun kuvion mukaan esimerkiksi
$\Phi(-2{,}0) = P(Z \leqslant -2{,}0) \approx 0{,}02$, $\Phi(-1{,}5) = P(Z \leqslant -1{,}5) \approx 0{,}07$ ja
$\Phi(0{,}5) = P(Z \leqslant 0{,}5) \approx 0{,}50 + 0{,}19 = 0{,}69$.

Kirjan lopussa sivulla 216 olevassa taulukossa on funktion $\Phi(z)$ arvoja positiivisilla muuttujan arvoilla. Joissakin laskimissa on toiminto, jolla voidaan määrittää funktion $\Phi(z)$ arvoja kaikilla muuttujan arvoilla.

ESIMERKKI 2

Jaanan kotimatkan kesto on normaalisti jakautunut. Odotusarvo on 48 minuuttia ja keskihajonta 7 minuuttia. Millä todennäköisyydellä matkaan menee a) korkeintaan tunti b) 50–60 minuuttia?

Ratkaisu

a) Olkoon satunnaismuuttuja X kotimatkan kesto. On laskettava todennäköisyys $P(X \leqslant 60)$.

Normitetaan.

$$P(X \leqslant 60) = P\left(Z \leqslant \frac{60 - 48}{7}\right) \approx P(Z \leqslant 1{,}71)$$

$P(X \leqslant x) = P(Z \leqslant z)$, missä $z = \frac{x - 48}{7}$.

Satunnaismuuttuja Z noudattaa normitettua normaalijakaumaa.

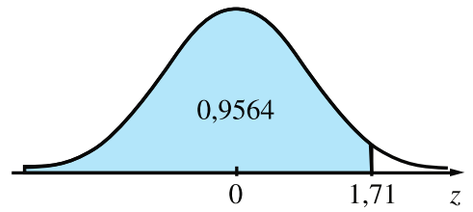
---

* Kertymäfunktio vastaa edellisessä luvussa tutkittua jatkuvan tilastollisen muuttujan kertymää.

Kirjan lopussa olevasta normitetun normaalijakauman taulukosta nähdään, että $\Phi(1{,}71) \approx 0{,}9564$.

Siis $P(X \leqslant 60) \approx P(Z \leqslant 1{,}71) \approx 0{,}96$.

	0	1	2	3
...				
1,5	9332	9345	9357	9370
1,6	9452	9463	9474	9484
1,7	9554	9564	9573	9582
1,8	9641	9649	9656	9664
1,9	9713	9719	9726	9732
...				



b) On laskettava todennäköisyys $P(50 \leqslant X \leqslant 60)$.

$P(50 \leqslant X \leqslant 60)$ $\qquad P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$

$= P(X \leqslant 60) - P(X \leqslant 50)$

$= P\left(Z \leqslant \frac{60-48}{7}\right) - P\left(Z \leqslant \frac{50-48}{7}\right)$ Normitetaan.

$\approx P(Z \leqslant 1{,}71) - P(Z \leqslant 0{,}29)$

$= \Phi(1{,}71) - \Phi(0{,}29)$ Kertymäfunktion Φ arvot nähdään taulukosta.

$\approx 0{,}9564 - 0{,}6141 \approx 0{,}34$

Vastaus a) 0,96 b) 0,34

ESIMERKKI 3

Tutkimuksessa havaittiin, että spagettipakkausten massan keskiarvo oli 508 g ja keskihajonta 9,0 g. Pakkausten massa noudattaa normaalijakaumaa.

a) Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa on alle 500 g?

b) Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa on välillä 490 g–510 g?

Ratkaisu

a) Olkoon satunnaismuuttuja X satunnaisesti valitun pakkauksen massa. On laskettava todennäköisyys $P(X < 500)$.

$$P(X < 500) = P\left(Z < \frac{500 - 508}{9}\right) \qquad \text{Normitetaan.}$$

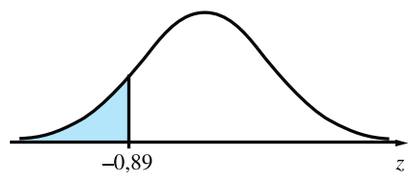
$$\approx P(Z < -0{,}89) = \Phi(-0{,}89)$$

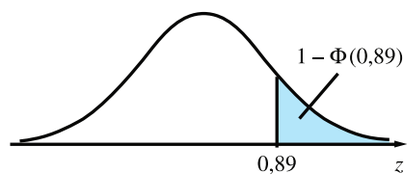
Kertymäfunktion arvoa $\Phi(-0{,}89)$ ei löydy suoraan normaalijakauman taulukosta, sillä taulukossa on funktion Φ arvot ainoastaan positiivisilla z:n arvoilla. Negatiivisilla z:n arvoilla käytetään hyväksi normitetun normaalijakauman symmetriaa kohdan 0 suhteen.

Symmetrian perusteella kohdan $-0{,}89$ vasemmalla puolella on yhtä suuri osa jakaumasta kuin kohdan 0,89 oikealla puolella eli

$$\Phi(-0{,}89) = 1 - \Phi(0{,}89)$$

$$\approx 1 - 0{,}8133 = 0{,}1867.$$





Todennäköisyys, että pakkauksen massa on pienempi kuin 500 g, on 0,19. Siis noin 19 %:lla pakkauksista massa on alle 500 g.

b) On laskettava todennäköisyys $P(490 \leqslant X \leqslant 510)$.

$P(490 \leqslant X \leqslant 510)$ $\qquad P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$

$= P(X \leqslant 510) - P(X \leqslant 490)$

$= P(Z \leqslant \frac{510 - 508}{9}) - P(Z \leqslant \frac{490 - 508}{9})$ Normitetaan.

$\approx P(Z \leqslant 0{,}22) - P(Z \leqslant -2)$

$= \Phi(0{,}22) - \Phi(-2)$ $\qquad$ Symmetrian nojalla $\Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$.

$= \Phi(0{,}22) - (1 - \Phi(2))$

$\approx 0{,}5871 - (1 - 0{,}9772) \approx 0{,}56$

Vastaus a) 19 % b) 56 %

ESIMERKKI 4

Pistemäärä kaupungissa järjestetyssä yhdeksäsluokkalaisten tasokokeessa on likimain normaalisti jakautunut. Keskiarvo on 62 pistettä ja keskihajonta 17 pistettä. Kiitettävien arvosanojen osuudeksi halutaan 30 % ja heikoin 4 % halutaan hylätä. Mikä on a) kiitettävän raja b) hyväksymisraja?

Ratkaisu a) Olkoon satunnaismuuttuja X satunnaisesti valitun oppilaan pistemäärä. On määritettävä sellainen pistemäärä x, että

$P(X \geqslant x) = 0{,}30$

eli

$P(X \leqslant x) = 1 - 0{,}30 = 0{,}70.$ $\qquad P(X \leqslant x) = 1 - P(X \geqslant x)$

Tulee siis olla

$P(Z \leqslant \frac{x - 62}{17}) = 0{,}70$

eli

$\Phi(\frac{x - 62}{17}) = 0{,}70.$

Etsitään taulukosta sellainen normitettu arvo z, jolle pätee $\Phi(z) = 0{,}70$. Lähinnä on arvo $z = 0{,}52$.

	0	1	2	3	4
0,0	5000	5040	5080	5120	5160
0,1	5398	5438	5478	5517	5557
0,2	5793	5832	5871	5910	5948
0,3	6179	6217	6255	6293	6331
0,4	6554	6591	6628	6664	6770
0,5	6915	6950	**6985**	7019	7054
0,6	7257	7291	7324	7357	7389
0,7	7580	7611	7642	7673	7704
0,8	7881	7910	7939	7967	7995
0,9	8159	8186	8212	8238	8264

Siis:

$$\frac{x - 62}{17} = 0{,}52 \qquad | \cdot 17$$

$$x - 62 = 0{,}52 \cdot 17$$

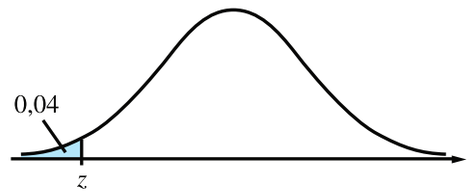
$$x = 62 + 0{,}52 \cdot 17 \approx 71$$

Kiitettävän rajaksi on asetettava 71 pistettä.*

b) On määritettävä pistemäärä x niin, että $\mathrm{P}(X \leqslant x) = 0{,}04$ eli

$$\mathrm{P}(Z \leqslant \frac{x - 62}{17}) = \Phi(\frac{x - 62}{17}) = 0{,}04.$$

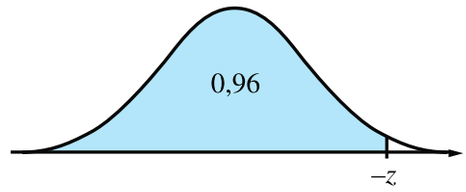
Taulukosta ei suoraan löydy sellaista normitettua arvoa z, jolle $\Phi(z) = 0{,}04$.



Käytetään symmetriaa:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) = 0{,}96$$

Taulukosta saadaan $-z \approx 1{,}75$ eli $z \approx -1{,}75$.



* Todennäköisyyttä 0,70 vastaavan taulukkoarvon $z = 0{,}52$ perusteella olisi voitu päätellä myös ilman yhtälöä, että hyväksymisrajan on oltava 0,52 keskihajonnan verran keskiarvon yläpuolella.

Siis:

$$\frac{x-62}{17} = -1{,}75 \qquad \big| \cdot 17$$

$$x - 62 = -1{,}75 \cdot 17$$

$$x = 62 - 1{,}75 \cdot 17 \approx 32$$

Rajan on oltava 1,75 keskihajonnan verran keskiarvon alapuolella.

Hyväksymisrajaksi on asetettava 32 pistettä.

Vastaus a) 71 pistettä b) 32 pistettä

Myös muiden satunnaismuuttujien todennäköisyyksiä voidaan laskea likimääräisesti normaalijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan avulla.

Binomijakauma

Oletetaan, että tapahtuma A tapahtuu yksittäisessä kokeessa todennäköisyydellä p. Merkitään Y:llä diskreettiä satunnaismuuttujaa, joka ilmaisee A:n tapahtumiskertojen lukumäärän, kun koetta toistetaan n kertaa. Satunnaismuuttujan Y eri arvojen todennäköisyydet voidaan laskea binomitodennäköisyyden kaavalla

$$\mathrm{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Sanotaan, että satunnaismuuttuja Y noudattaa *binomijakaumaa*. Voidaan osoittaa, että satunnaismuuttujan Y odotusarvo on

$$\mu = np$$

ja keskihajonta

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}\,.$$

Normaalijakauma-approksimaatio

Kun n on suuri, niin binomijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan Y todennäköisyydet

$\mathrm{P}(Y \leqslant k)$

ovat likimain yhtä suuret kuin todennäköisyydet

$\mathrm{P}(X \leqslant k)$,

missä X on satunnaismuuttuja, joka noudattaa normaalijakaumaa ja jolla on sama odotusarvo $\mu = np$ ja sama keskihajonta $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Siis binomijakauman todennäköisyyksiä voidaan approksimoida (määrittää likimääräisesti) normaalijakaumalla.*

Normaalijakauma-approksimaatiolla saadaan hyviä binomitodennäköisyyksien likiarvoja jo n:n ollessa joitakin kymmeniä.

Jatkuvuuskorjaus

Approksimaatiota voidaan parantaa niin sanotulla *jatkuvuuskorjauksella*.
Binomijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan mahdolliset arvot ovat kokonaislukuja. Jos on laskettava binomijakautuneelle satunnaismuuttujalle Y todennäköisyys $\mathrm{P}(Y \leqslant k)$, missä k on kokonaisluku, niin lasketaan normaalijakautuneelle satunnaismuuttujalle X todennäköisyys $\mathrm{P}(X \leqslant k + 0{,}5)$. Tai, jos on laskettava $\mathrm{P}(k_1 \leqslant Y \leqslant k_2)$, niin lasketaan $\mathrm{P}(k_1 - 0{,}5 \leqslant X \leqslant k_2 + 0{,}5)$.

---

* Binomijakauman approksimoiminen normaalijakaumalla perustuu ns. *keskeiseen raja-arvolauseeseen*, jonka mukaan samanlaista jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summa lähenee aina normaalijakaumaa, kun yhteenlaskettavien määrä kasvaa.

ESIMERKKI 5

Noppaa heitetään 600 kertaa. Laske normaalijakauman avulla todennäköisyys, että saadaan 95–105 kuutosta.

Ratkaisu

Kyseessä on 600-kertainen toistokoe. Todennäköisyys saada yhdellä heitolla kuutonen on $\frac{1}{6}$.

Diskreetti satunnaismuuttuja

Y = kuutosten lukumäärä 600 nopan heitossa

noudattaa binomijakaumaa odotusarvona $np = 600 \cdot \frac{1}{6} = 100$ ja

keskihajontana $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 9{,}13.$

Lasketaan todennäköisyys $\mathrm{P}(95 \leqslant Y \leqslant 105)$ korvaamalla satunnaismuuttuja Y satunnaismuuttujalla X, joka noudattaa normaalijakaumaa odotusarvona 100 ja keskihajontana 9,13, ja suorittamalla jatkuvuuskorjaus.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(95 \leqslant Y \leqslant 105) &\approx \mathrm{P}(94{,}5 \leqslant X \leqslant 105{,}5) \\
&= \mathrm{P}(X \leqslant 105{,}5) - \mathrm{P}(X \leqslant 94{,}5) \qquad \text{Normitetaan.} \\
&= \mathrm{P}\left(Z \leqslant \frac{105{,}5 - 100}{9{,}13}\right) - \mathrm{P}\left(Z \leqslant \frac{94{,}5 - 100}{9{,}13}\right) \\
&\approx \mathrm{P}(Z \leqslant 0{,}60) - \mathrm{P}(Z \leqslant -0{,}60) \\
&= \Phi(0{,}60) - \Phi(-0{,}60) \qquad \Phi(-0{,}60) = 1 - \Phi(0{,}60) \\
&= \Phi(0{,}60) - (1 - \Phi(0{,}60)) \\
&= 2\Phi(0{,}60) - 1 \\
&\approx 2 \cdot 0{,}7257 - 1 \approx 0{,}45
\end{aligned}$$

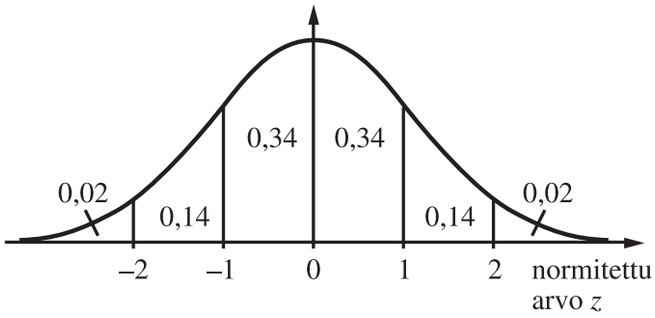
Vastaus

0,45

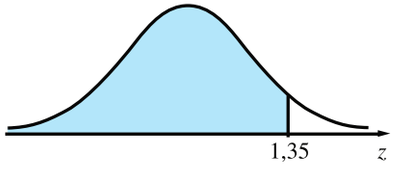
TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

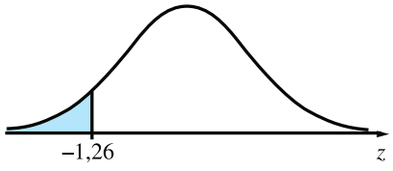
321. Ns. älykkyystestit laaditaan yleensä niin, että tulokset noudattavat normaalijakaumaa, jonka keskiarvo on 100 ja keskihajonta 15.
a) Laske tuloksia 85 ja 130 vastaavat normitetut arvot.
b) Päättele kuvion osuuksista, kuinka monta prosenttia testattavista saa tulokseksi yli 85 ja kuinka monta prosenttia saa korkeintaan 130.



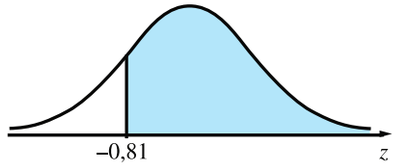
322. Muuttuja Z noudattaa normitettua normaalijakaumaa. Selvitä todennäköisyydet normitetun normaalijakauman kertymäfunktion taulukon avulla (sivu 216).
a) $P(Z \leqslant 1{,}35)$



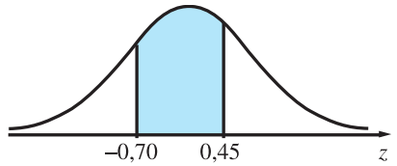
b) $P(Z \leqslant -1{,}26)$



c) $P(Z > -0{,}81)$



d) $P(-0{,}70 \leqslant Z \leqslant 0{,}45)$



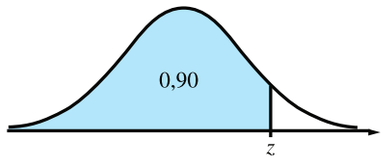
323. Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 3,0 ja keskihajonta 1,9. Määritä kahden desimaalin tarkkuudella todennäköisyys
a) $P(X \leqslant 3{,}7)$
b) $P(X \leqslant 1{,}9)$
c) $P(0{,}0 \leqslant X \leqslant 4{,}1)$.

324. Suomalaisten poikalasten syntymäpituus noudattaa normaalijakaumaa. Syntymäpituuden keskiarvo on 52,0 cm ja keskihajonta 3,5 cm. Kuinka monella prosentilla poikavauvoista pituus on a) alle 56,0 cm b) yli 50,0 cm
c) välillä 50,0 cm–56,0 cm?
d) Kuinka monella prosentilla poikavauvoista syntymäpituus poikkeaa keskiarvosta enemmän kuin 5,0 cm?

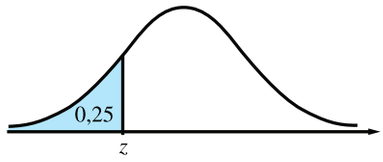
325. Housutehtailijan asiakaskunnassa vyötärönmitta noudattaa normaalijakaumaa. Vyötärönmitan keskiarvo on 30,4" ja keskihajonta 1,6". Housujen koot on numeroitu niin, että esimerkiksi koko 29 kattaa välin 28,5"–29,5". Kuinka monet kokoa 29 olevat housut tulee olla 5 000 housun erässä?

326. Satunnaismuuttuja Z noudattaa normitettua normaalijakaumaa. Selvitä normitetun normaalijakauman taulukon avulla sellainen muuttujan arvo z, että

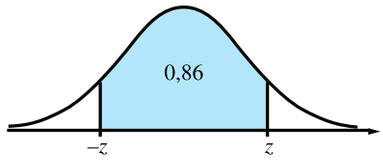
a) $P(Z \leqslant z) = 0{,}90$



b) $P(Z \leqslant z) = 0{,}25$



c) $P(-z \leqslant Z \leqslant z) = 0{,}86$.



327. Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 10,0 ja keskihajonta 4,0. Määritä sellainen satunnaismuuttujan X arvo x, että

a) $P(X \leqslant x) = 0{,}67$

b) $P(X \geqslant x) = 0{,}90$.

328. Soveltuvuustestin tulokset noudattavat likimain normaalijakaumaa. Tulosten keskiarvo on 82 pistettä ja keskihajonta 12 pistettä. Mikä tulee asettaa hyväksymisrajaksi, jos halutaan, että testin läpäisee a) 15 % b) 80 % testiin osallistujista?

329. Seitsemänvuotiaitten suomalaisten poikien pituus noudattaa likimain normaalijakaumaa keskiarvona 122,7 cm ja keskihajontana 5,0 cm. Määritä keskiarvon 122,7 cm suhteen symmetrinen väli, jolla on pojista

a) 90 % b) 95 %.

330. Kone, joka annostelee sokeria kilon pusseihin, tuottaa keskimäärin juuri sen painoisia pusseja, kuin se on säädetty annostelemaan. Kone punnitsee kuitenkin sen verran epätarkasti, että pussien painon keskihajonta on 7,8 g. Pussien painot noudattavat normaalijakaumaa. Minkä painoisia pusseja kone tulee säätää annostelemaan, jotta todennäköisyys, että pussi painaa vähintään vaaditut 1 000 g, olisi 0,90?

331. 16-vuotiaiden poikien pituuden keskiarvo on 173,1 cm ja keskihajonta 7,2 cm. Koripallojoukkueeseen arvotaan kuusi 16-vuotiasta poikaa. Millä todennäköisyydellä joukkueeseen tulee ainakin yksi yli 180 cm pitkä pelaaja?

332. Hehkulamppumallin käyttöiän tiedetään noudattavan normaalijakaumaa. Tuhannen lampun koepoltossa puolet lampuista oli sammunut 1 362 tunnin kuluttua. Kun koe päätettiin 1 630 tunnin kuluttua, 910 lamppua oli sammunut. Arvioi lamppujen käyttöiän keskiarvo ja keskihajonta.

333. Noppaa heitetään 1 200 kertaa.

a) Mikä on satunnaismuuttujan ”kuutosten lukumäärä” odotusarvo ja keskihajonta?

Laske normaalijakauma-approksimaation avulla todennäköisyys, että saadaan

b) 180–220 kuutosta c) 200 kuutosta.

334. Lentokoneeseen, johon mahtuu 390 matkustajaa, on myyty 402 lentolippua. Tiedetään, että paikkansa varanneista noin 95 % saapuu varaamalleen lennolle.

a) Mikä on satunnaismuuttujan Y = ”lennolle saapuvien matkustajien lukumäärä” odotusarvo ja keskihajonta?

b) Laske normaalijakauma-approksimaation avulla todennäköisyys, että paikat riittävät.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

335. Veren kohonnut LDL-kolesterolitaso on eräs sydän- ja verisuonitautien riskitekijä. Eräässä miesryhmässä kolestrolipitoisuuden todettiin noudattavan likimain normaalijakaumaa keskiarvona 4,8 mmol/l (millimoolia litrassa) ja keskihajontana 0,6 mmol/l. Määriteltiin, että miehillä, joiden kolesterolitaso on 1–2 keskihajonnan verran keskiarvoa suurempi, on kohonnut sairastumisriski, ja miehillä, joiden kolesterolitaso on enemmän kuin kahden keskihajonnan verran keskiarvoa suurempi, on korkea sairastumisriski.
a) Millä välillä oleva kolesterolipitoisuus merkitsee kohonnutta sairastumisriskiä ja millä välillä oleva suurta sairastumisriskiä?
b) Kuinka monella prosentilla ryhmän miehistä on kohonnut sairastumisriski ja kuinka monella prosentilla korkea sairastumisriski?

336. Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 12,7 ja keskihajonta 3,0. Määritä kahden desimaalin tarkkuudella
a) $P(X < 14{,}0)$
b) $P(10{,}0 < X < 14{,}0)$.

337. 14-vuotiaiden tyttöjen pituuden keskiarvo on 160,2 cm ja keskihajonta 6,1 cm. Pituus noudattaa likimain normaalijakaumaa. Kuinka monella prosentilla 14-vuotiaista tytöistä pituus on
a) alle 155,0 cm
b) yli 170,0 cm
c) välillä 150,0 cm–170,0 cm?

338. Eräässä vesistössä viisivuotiaiden kuhien keskipituus on 42,0 cm ja pituuden keskihajonta 5,8 cm. Kuinka monta prosenttia kuhista ylittää pyynnin alamitan 37 cm? Pituuden oletetaan noudattavan likimain normaalijakaumaa.

339. Koneen valmistamien teräslevyjen paksuus noudattaa likimain normaalijakaumaa keskihajontana 1,7 mm. Millä todennäköisyydellä koneen tuotannosta valitun levyn paksuus poikkeaa keskiarvosta yli 2,0 mm?

340. Kone valmistaa terässilmukoita, joista kootaan nostolaitteen ketjuja. Silmukan kantokyky noudattaa normaalijakaumaa. Kantokyvyn keskiarvo on 2 027 kg ja keskihajonta 15 kg. Millä todennäköisyydellä kymmenestä silmukasta tehty ketju kestää 2 000 kg taakan? Silmukoiden omaa painoa ei oteta huomioon.

341. Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 12,7 ja keskihajonta 3,0. Määritä sellainen satunnaismuuttujan X arvo x, että
a) $P(X \geqslant x) = 0{,}12$
b) $P(X \leqslant x) = 0{,}18$.

342. Pienin riittävä annos lääkettä, joka parantaa tietyn kissojen sairauden, vaihtelee kissasta toiseen. Annoksen suuruus noudattaa normaalijakaumaa keskiarvona 25,0 milligrammaa ja keskihajontana 2,5 milligrammaa. Kuinka suuri annos parantaa 90 % kissoista?

343. Niin sanotut älykkyystestit laaditaan yleensä niin, että tulokset noudattavat normaalijakaumaa, jonka keskiarvo on 100 ja keskihajonta 15. Jos halutaan, että keskimmäinen 80 % väestöstä on älykkyydeltään ”normaaleja”, niin mitkä pistemäärät saaneet luokitellaan älykkyydeltään suuntaan tai toiseen poikkeaviksi?

344. Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa ja $P(X \leqslant 11{,}5) = 0{,}91$.
a) Mikä on satunnaismuuttujan X odotusarvo, jos muuttujan keskihajonta on 2,9?
b) Mikä on satunnaismuuttujan X keskihajonta, jos muuttujan odotusarvo on 8,2?

345. Erään mittauksen antamat arvot jakautuvat normaalisti keskiarvon 100 ympärille niin, että 72 % arvoista on välillä [95, 105]. Kuinka suurella todennäköisyydellä mittausarvo on yli 110?

346. Mittauspaikassa 31 % autoilijoista noudatti nopeusrajoitusta 50 km/h ja 7 % ajoi yli 70 km/h. Oletetaan, että autojen nopeus jakautui normaalisti. Arvioi keskimääräinen nopeus.

347. Oletetaan, että satunnaismuuttujat X_1 ja X_2 noudattavat normaalijakaumaa odotusarvoina μ_1 ja μ_2 ja keskihajontoina σ_1 ja σ_2. Voidaan osoittaa, että tällöin satunnaismuuttuja $X = X_1 + X_2$ noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on $\mu = \mu_1 + \mu_2$ ja keskihajonta $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Ratkaise tämän tiedon avulla seuraava ongelma.
Leena kulkee koulumatkansa osan linja-autolla ja osan raitiovaunulla. Automatkaan ja raitiotiematkaan kuluvat ajat noudattavat kumpikin normaalijakaumaa. Automatkan ajan odotusarvo on 35 minuuttia ja keskihajonta 6 minuuttia, ja raitiotiematkan ajan odotusarvo on 18 minuuttia ja keskihajonta 3 minuuttia. Millä todennäköisyydellä matkoihin kuluu
a) kouluun mennessä yhteensä yli tunti
b) kouluun mennessä ja koulusta tullessa yhteensä yli kaksi tuntia?

348. Kolikkoa heitetään 60 kertaa. Olkoon satunnaismuuttuja Y kruunien lukumäärä.
a) Mikä on satunnaismuuttujan Y odotusarvo ja keskihajonta?
Laske normaalijakauma-approksimaation avulla todennäköisyys, että saadaan
b) 29–31 kruunaa c) 30 kruunaa.
Laske vertailun vuoksi myös tapahtumien todelliset todennäköisyydet.

349. Oletetaan, että 52 % väestöstä vastustaa ydinvoiman lisärakentamista. Laske normaalijakauma-approksimaation avulla todennäköisyys, että kyselyssä, joka on tehty 600 satunnaisesti valitulle henkilölle, lisärakentamisen kannattajia on enemmistö.

350. Ihmisen lepopulssi (sydämen lyöntien lukumäärä minuutissa) ei noudata normaalijakaumaa. Sen sijaan sydämen lyönnin kesto samanikäisten ja samaa sukupuolta olevien keskuudessa noudattaa normaalijakaumaa. Eräässä tällaisessa ryhmässä lyönnin keston keskiarvo on 0,83 s ja keskihajonta 0,13 s.
a) Kuinka yleistä ryhmässä on, että lepopulssi on yli 80?
b) Millä välillä lepopulssi on 90 %:lla ryhmän jäsenistä, kun nopeimmat 5 % ja hitaimmat 5 % jätetään pois?

Kertaus

Tässä luvussa kerrataan koko kurssi yksityiskohtaisten esimerkkien avulla. Teorian ja menetelmien kertauksen jälkeen on kertaustehtäviä, jotka ovat samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä. Kertausluku päättyy tehtäväsarjoihin, jotka sisältävät pääosin vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta.

Todennäköisyys

Oletetaan, että satunnaisilmiön kaikki tulosmahdollisuudet eli alkeistapaukset ovat yhtä mahdolliset eli symmetriset.
Alkeistapausten joukon (perusjoukon) osajoukkoja kutsutaan tapahtumiksi. Alkeistapauksia, joista tapahtuma muodostuu, kutsutaan tapahtumalle suotuisiksi alkeistapauksiksi.
Tapahtuman A klassinen todennäköisyys on

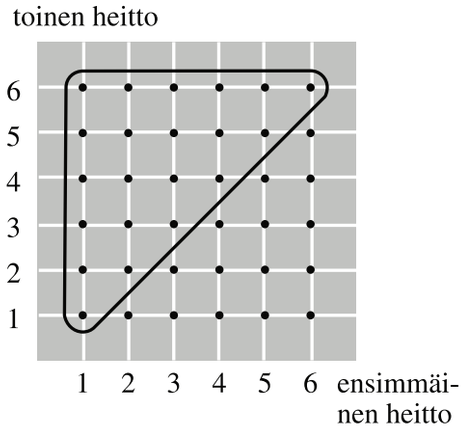
$$\text{P(tapahtuma)} = \frac{n_A}{n},$$

missä n_A on tapahtumalle A suotuisten alkeistapausten lukumäärä ja n on kaikkien alkeistapausten lukumäärä.

Heitetään noppaa kahdesti. Perusjoukko muodostuu 36 symmetrisestä alkeistapauksesta (1, 1), (1, 2), (1, 3) jne.

Tapahtumalle ”jälkimmäisellä heitolla tulee vähintään yhtä suuri silmäluku kuin ensimmäisellä” suotuisten alkeistapausten lukumäärä on 21, joten tapahtuman todennäköisyys on

$$\frac{21}{36} \approx 0{,}58.$$



Tapahtuman kokeellinen eli tilastollinen todennäköisyys lasketaan tilastoista.

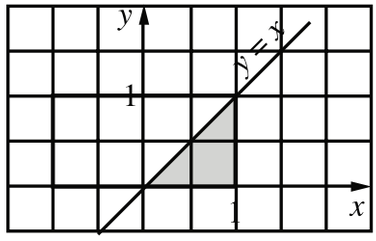
Kun kokeeksi poltettiin 400 samanlaista sähkölamppua, niin 1 000 tunnin kuluttua paloi vielä 267 lamppua. Kokeen mukaan tällaiselle lampulle on

P(palaa vähintään 1 000 tuntia)

$$= \frac{267}{400} \approx 0{,}67.$$

Alkeistapausten määrän mitta voi myös olla jokin geometrinen mitta, esimerkiksi kulman suuruus, janan pituus tai alueen pinta-ala. Laskettua todennäköisyyttä kutsutaan tällöin geometriseksi todennäköisyydeksi.

Arvotaan satunnaisluku x väliltä $[-1, 1]$ ja satunnaisluku y väliltä $[0, 1]$. Lasketaan todennäköisyys, että $y \leqslant x$.



Lukujen arpominen vastaa pisteen arpomista kuvion suorakulmiosta. Pisteen x-koordinaatti on arvottu luku x ja y-koordinaatti arvottu luku y. Epäyhtälö $y \leqslant x$ toteutuu suoralla $y = x$ ja sen alapuolella. Erottuvan kolmion pinta-alan suhde suorakulmion pinta-alaan on $\frac{1}{4}$.

Siis

$$P(y \leqslant x) = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Diskreetti satunnaismuuttuja

Muuttuja X, jonka arvot määrää sattuma, on satunnaismuuttuja. Diskreetin satunnaismuuttujan arvot ovat erillisiä lukuja.

Olkoon satunnaismuuttuja X Helin voitto yhdellä kierroksella, kun pelataan seuraavaa uhkapeliä: Heitetään kahta kolikkoa. Jos tulee kaksi klaavaa, Heli menettää kolme tulitikkua. Jos tulee yksi klaava, Heli menettää yhden tulitikun. Jos ei tule yhtään klaavaa, Heli voittaa viisi tulitikkua.

Satunnaismuuttujan X jakauman määräävät muuttujan mahdolliset arvot $x_1, \ldots, x_n$ ja näiden arvojen todennäköisyydet $p_1, \ldots, p_n$, missä siis

$p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$.

Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat -3, -1 ja 5.

Satunnaismuuttujan X jakauma:

arvo	todennäköisyys
-3	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{4}$

Todennäköisyyksien $p_1, \ldots, p_n$ summa on 1:

$p_1 + \ldots + p_n = 1$.

Tarkistukseksi kannattaa laskea, että todennäköisyyksien summa on 1.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$\mathrm{E}(X) = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$.

Lasketaan odotusarvo Helin voitolle yhdellä kierroksella.

$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{4} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot 5 = 0$

Odotusarvoa laskettaessa satunnaismuuttujan jokainen arvo kerrotaan todennäköisyydellään ja tulot lasketaan yhteen.

Odotusarvo on 0 tulitikkua.

Kun satunnaiskoetta, johon satunnaismuuttuja X liittyy, toistetaan pitkään, ja aina kirjataan satunnaismuuttujan X arvo, niin tilastoitujen arvojen keskiarvo lähenee odotusarvoa.

Satunnaismuuttujan X keskihajonta on

$$\mathrm{D}(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2}.$$

Kaavassa on jokaisen muuttujan arvon x_i odotusarvosta μ lasketun poikkeaman neliö kerrottu arvon x_i todennäköisyydellä p_i. Tulot on laskettu yhteen. Keskihajonta on summan neliöjuuri.

Voidaan ennakoida, että peliä pitkään pelattaessa Heli pysyy suurin piirtein omillaan.

Edellä kuvatun satunnaismuuttujan X keskihajonnan neliö on

$$\mathrm{D}^2(X) = \frac{1}{4}(-3-0)^2 + \frac{1}{2}(-1-0)^2 + \frac{1}{4}(5-0)^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 25 = \frac{36}{4} = 9$$

ja keskihajonta

$\mathrm{D}(X) = \sqrt{9} = 3$ (tulitikkua).

Kombinatoriset menetelmät

Klassisia todennäköisyyksiä laskettaessa tarvitaan erilaisia menetelmiä laskea lukumääriä.

Monet kombinatoriset menetelmät perustuvat tuloperiaatteeseen:

Oletetaan, että toimitus voidaan jakaa peräkkäisiin vaiheisiin ja

1. vaiheessa on n_1 vaihtoehtoa
2. vaiheessa on n_2 vaihtoehtoa
.
.
.
k. vaiheessa on n_k vaihtoehtoa.

Tällöin koko toimituksen suorittamiseksi on kaikkiaan $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ vaihtoehtoa.

Suomen kielen aakkosissa on 29 kirjainta, joista 9 on vokaaleja. Muodostetaan kirjaimista umpimähkäinen (ei välttämättä merkityksellinen) nelikirjaiminen sana, jossa sama kirjain saa toistua. Millä todennäköisyydellä sanan kaikki kirjaimet ovat konsonantteja ja eri kirjaimia?

Lasketaan ensin kaikkien alkeistapausten (mahdollisten sanojen) lukumäärä.

ensimmäinen kirjain	29 vaihtoehtoa
toinen kirjain	29 vaihtoehtoa
kolmas kirjain	29 vaihtoehtoa
neljäs kirjain	29 vaihtoehtoa

Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 = 29^4$.

Lasketaan suotuisten alkeistapausten lukumäärä.

ensimmäinen kirjain	20 vaihtoehtoa
toinen kirjain	19 vaihtoehtoa
kolmas kirjain	18 vaihtoehtoa
neljäs kirjain	17 vaihtoehtoa

Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$. Siis

P(kaikki eri konsonantteja)

$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{29^4} \approx 0{,}16.$$

Jos joukossa on n alkiota, niin tuloperiaatteen nojalla joukon alkiot voidaan asettaa järjestykseen

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

eri tavalla.

Kun n alkion joukosta valitaan k:n eri alkion jono, niin valinnanmahdollisuuksia on

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}_{k \text{ tekijää}}.$$

Tulossa on k:n peräkkäisen kokonaisluvun tulo laskettuna luvusta n alaspäin.
Lausekkeen arvo voidaan laskea myös kertoman avulla:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

tai laskimen näppäimellä nPr.

n alkion joukon k alkion (järjestämättömien) osajoukkojen lukumäärän ilmaisee binomikerroin

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Binomikertoimen arvo voidaan laskea laskimen näppäimellä nCr.

Tietosanakirjan 12 osaa voidaan sijoittaa hyllylle

$12! = 479\,001\,600$

eri järjestykseen.

Laatikossa on viidenvärisiä sukkia, 10 sukkaa jokaista väriä. Otetaan umpimähkään neljä sukkaa. Millä todennäköisyydellä sukat ovat erivärisiä?

Valitaan alkeistapauksiksi neljän sukan jonot. Sukkia on yhteensä 50, joten erilaisia neljän sukan jonoja on $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47$.

Suotuisia ovat jonot, joissa sukat ovat erivärisiä. Tällaisia jonoja on $50 \cdot 40 \cdot 30 \cdot 20$.

$$\text{P(sukat erivärisiä)} = \frac{50 \cdot 40 \cdot 30 \cdot 20}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47} \approx 0{,}22$$

17 jäsenen valmennusryhmästä on valittava neljän jäsenen edustusjoukkue.
Edustusjoukkueella on

$$\binom{17}{4} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{4!} = \frac{17!}{4!\,13!}$$

erilaista mahdollista kokoonpanoa. Binomikertoimen arvo voidaan laskea käyttämällä lausekketta tai näppäilemällä 17 nCr 4. Saadaan:

$\binom{17}{4} = 2\,380.$

Laatikossa on 15 sähkölamppua, joista viisi on viallisia. Laatikosta otetaan kuusi lamppua. Lasketaan todennäköisyys, että valituista lampuista tasan neljä on virheetöntä.

Valitaan alkeistapauksiksi 15 lampun joukosta valitut kuuden lampun osajoukot.

Alkeistapausten lukumäärä on $\binom{15}{6}$.

Suotuisissa kuuden lampun osajoukoissa on neljä virheetöntä ja kaksi viallista lamppua.

Valitaan 4 lamppua 10 virheettömästä:

$\binom{10}{4}$ vaihtoehtoa

Valitaan 2 lamppua 5 viallisesta:

$\binom{5}{2}$ vaihtoehtoa

Tuloperiaatteen nojalla suotuisten kuuden lampun joukkojen lukumäärä on

$\binom{10}{4} \cdot \binom{5}{2}$.

$$P(\text{4 virheetöntä}) = \frac{\binom{10}{4} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{15}{6}} \approx 0{,}42$$

Todennäköisyyksien laskusääntöjä

Tapahtuman A vastatapahtuma $\overline{A}$ on tapahtuma ”A ei tapahdu”.

Laatikossa on viidenvärisiä sukkia, 10 sukkaa jokaista väriä. Otetaan umpimähkään neljä sukkaa. Tapahtuman ”saadaan ainakin kaksi samanväristä sukkaa” vastatapahtuma on ”kaikki eri värisiä”.

Tapahtuman A ja vastatapahtuman $\overline{A}$ todennäköisyyksien summa on 1.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$

joten

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Tapahtuman ”kaikki eri värisiä” todennäköisyys on laskettu edellä:

$$P(\text{kaikki eri värisiä}) \approx 0{,}22,$$

joten

$$P(\text{ainakin kaksi samanväristä})$$

$$= 1 - P(\text{kaikki erivärisiä}) \approx 1 - 0{,}22 = 0{,}78.$$

Todennäköisyys, että tapahtumat A ja B molemmat tapahtuvat, voidaan laskea yleisellä kertolaskusäännöllä

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B \mid A),$$

missä $P(B \mid A)$ on ehdollinen todennäköisyys: todennäköisyys, että B tapahtuu, kun A on tapahtunut.

Pakasta vedetään kaksi korttia. Todennäköisyys, että molemmat ovat ässiä, on

$$P(\text{1. ja 2. kortti ässiä})$$

$$= P(\text{1. on ässä}) \cdot P(\text{2. on ässä} \mid \text{1. on ässä})$$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \approx 0{,}0045.$$

Todennäköisyys voidaan laskea myös klassisena todennäköisyytenä käyttämällä alkeistapauksina jonoja:

$$\frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51} \approx 0{,}0045$$

tai kahden kortin osajoukkoja:

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} \approx 0{,}0045.$$

Tapahtumat A ja B ovat toisistaan riippumattomat, jos toisen todennäköisyys pysyy samana riippumatta siitä, onko toinen tapahtuma tapahtunut vai ei.

Jos tapahtumat A ja B ovat toisistaan riippumattomat, niin $P(B \mid A) = P(B)$ ja

$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$.

Todennäköisyys, että ainakin toinen tapahtumista A ja B tapahtuu, on

$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$.

Tapahtumien A ja B todennäköisyyksien summasta vähennetään tapahtuman
”A ja B molemmat tapahtuvat”
todennäköisyys.

Tapahtumat A ja B ovat toisensa poissulkevat, jos toisen tapahtuessa toinen ei voi tapahtua. Jos tapahtumat A ja B ovat toisensa poissulkevat, niin $P(A \text{ ja } B) = 0$, ja todennäköisyys, että jompikumpi tapahtuu, on A:n ja B:n todennäköisyyksien summa.

$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$

Eräässä lukiossa 63 % tytöistä ja 52 % pojista vastustaa ydinvoiman lisärakentamista. Todennäköisyys, että arpomalla yhteensaatetut lukion tyttö ja poika molemmat vastustavat ydinvoimaa, on

P(molemmat vastustavat)

= P(tyttö vastustaa) · P(poika vastustaa)

$= 0{,}63 \cdot 0{,}52 \approx 0{,}33$.

Pakasta vedetään kaksi korttia. Lasketaan todennäköisyys, että molemmat ovat herttoja tai molemmat ovat kuvakortteja.
Yhteenlaskusäännön mukaan

P(molemmat herttoja tai kuvakortteja)

= P(molemmat herttoja) + P(molemmat kuvakortteja) – P(molemmat herttakuvia)

$$= \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51} + \frac{16 \cdot 15}{52 \cdot 51} - \frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51}$$

$\approx 0{,}14$.

Jokainen todennäköisyys laskettiin käyttämällä alkeistapauksina kahden kortin jonoja. Todennäköisyydet voidaan laskea myös käyttämällä alkeistapauksina kahden kortin osajoukkoja tai ne voidaan laskea yleisellä kertolaskusäännöllä.

Lukion tytöistä 63 % ja pojista 52 % vastustaa ydinvoiman lisärakentamista. Arvotaan lukion oppilaiden joukosta yksi tyttö ja yksi poika. Tapahtuma ”eri mieltä ydinvoimasta” jakautuu kahteen toisensa poissulkevaan tapahtumaan: ”tyttö vastustaa ja poika kannattaa” tai ”tyttö kannattaa ja poika vastustaa”.

P(eri mieltä)

= P(tyttö vastustaa ja poika kannattaa)
+ P(tyttö kannattaa ja poika vastustaa)

$= 0{,}63 \cdot 0{,}48 + 0{,}37 \cdot 0{,}52 \approx 0{,}49$

Toistokoe

Toistetaan samaa satunnaiskoetta ja jokaisella toistolla seurataan, tapahtuuko tapahtuma A. Jos toistot ovat toisistaan riippumattomat, eli A:n todennäköisyys yksittäisessä toistossa ei riipu edeltävien kokeiden tuloksista, on kyseessä toistokoe.

Suoritetaan n-kertainen toistokoe. Oletetaan, että tapahtuma A tapahtuu yksittäisessä kokeessa todennäköisyydellä p. Todennäköisyys, että A tapahtuu n toistossa k kertaa, on

$$\mathrm{P}(A \text{ tapahtuu } n \text{ toistossa } k \text{ kertaa}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Toisin sanoen: jos satunnaismuuttuja X ilmaisee A:n tapahtumakertojen lukumäärän n-kertaisessa toistokokeessa, niin

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Suomalaisista 6 % puhuu äidinkielenään ruotsia. Lasketaan, millä todennäköisyydellä arvalla valitussa 50 hengen suomalaisryhmässä on ainakin kolme henkilöä, joiden äidinkieli on ruotsi.

Arvotaan 50 suomalaista yksi kerrallaan. Koska arvottu määrä on pieni suhteessa suomalaisten määrään, todennäköisyys, että arvottu henkilö on ruotsinkielinen, ei arvonnan mittaan muutu. Koetta voidaan pitää toistokokeena. Todennäköisyys, että yksittäinen arvottu on ruotsinkielinen, on 0,06.

Olkoon satunnaismuuttuja X ruotsinkielisten lukumäärä arvotun 50 henkilön joukossa. Tällöin

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{50}{k} 0{,}06^k \, 0{,}94^{50-k}.$$

On laskettava todennäköisyys $\mathrm{P}(X \geqslant 3)$. Lasketaan ensin vastatapahtuman $\mathrm{P}(X \leqslant 2)$ todennäköisyys.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(X \leqslant 2) \\
&= \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2) \\
&= 0{,}94^{50} + \binom{50}{1} 0{,}06 \cdot 0{,}94^{49} \\
&+ \binom{50}{2} 0{,}06^2 \cdot 0{,}94^{48} \approx 0{,}42
\end{aligned}$$

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \geqslant 3) &= 1 - \mathrm{P}(X \leqslant 2) \\
&\approx 1 - 0{,}42 = 0{,}58.
\end{aligned}$$

Tilastollinen muuttuja

Diskreetin tilastollisen muuttujan arvot ovat erillisiä lukuja.

Tulitikkujen pakkauskoneen tuotannosta otettiin 40 rasian näyte.

tulitikkuja	frekvenssi	suhteellinen frekvenssi (%)
48	1	2,5
49	4	10,0
50	11	27,5
51	9	22,5
52	13	32,5
53	2	5,0

Muuttujan moodi eli tyyppiarvo havaintoaineistossa on havaintoarvo, jonka frekvenssi on suurin.

Tulitikkujen lukumäärän tyyppiarvo on 52.

Muuttujan keskiarvo havaintoaineistossa on havaintoarvojen summa jaettuna havaintoarvojen lukumäärällä.

Tulitikkujen lukumäärän keskiarvo on

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 48 + 4 \cdot 49 + 11 \cdot 50 + 9 \cdot 51 + 13 \cdot 52 + 2 \cdot 53}{40}$$

$$\approx 50{,}9.$$

Keskiarvo voidaan laskea myös suhteellisten frekvenssien avulla.

$$\bar{x} = 0{,}025 \cdot 48 + 0{,}1 \cdot 49 + 0{,}275 \cdot 50 + 0{,}225 \cdot 51 + 0{,}325 \cdot 52 + 0{,}05 \cdot 53$$

$$\approx 50{,}9$$

Havaintoarvojen hajonnan mittalukuna käytetään keskihajontaa. Keskihajonta

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

on keskiarvosta laskettujen poikkeamien neliöiden keskiarvon neliöjuuri.

Jos tilastollinen muuttuja on jatkuva, havaintoaineisto luokitellaan.

Synnytykset synnyttäjän iän mukaan 1975 ($n = 65\,343$) (Lähde: Tilastokeskus)

synnyttäjän ikä	synnytyksiä %
15–24	41,2
25–29	37,9
30–39	19,6
40–49	1,3
	100,0

Keskiarvoa ja keskihajontaa laskettaessa jokaista luokkaa edustaa luokkakeskus. Luokkakeskus on luokan todellisten rajojen keskiarvo.

Luokan 15–24 todelliset rajat ovat 15 ja 25. Luokkakeskus on 20. Luokan 25–29 luokkakeskus on 27,5 jne. Synnyttäjien keski-ikä vuonna 1975 oli

$$0{,}412 \cdot 20 + 0{,}379 \cdot 27{,}5 + 0{,}196 \cdot 35 + 0{,}013 \cdot 45 \approx 26{,}1 \text{ (vuotta).}$$

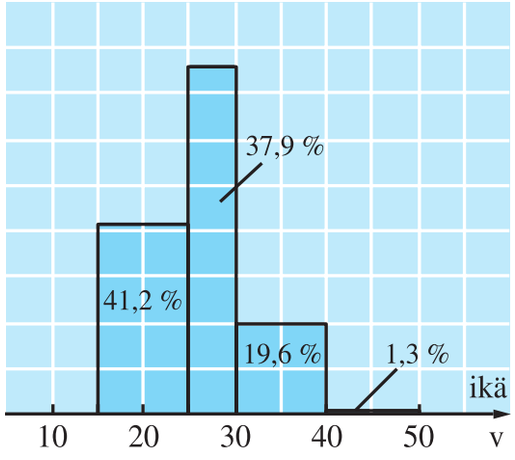
Jatkuvan tilastollisen muuttujan jakaumaa havainnollistetaan histogrammilla. Histogrammi muodostuu toisissaan kiinni olevista pylväistä, joiden rajat ovat luokan todellisten rajojen kohdalla. Pylvään pinta-ala ilmaisee luokan suhteellisen frekvenssin.

Käytetään pylväiden pinta-aloina suhteellisten frekvenssien prosenttilukuja.
Välille [15, 25] tulevan pylvään korkeus on

$$\frac{41{,}2}{10} = 4{,}12.$$

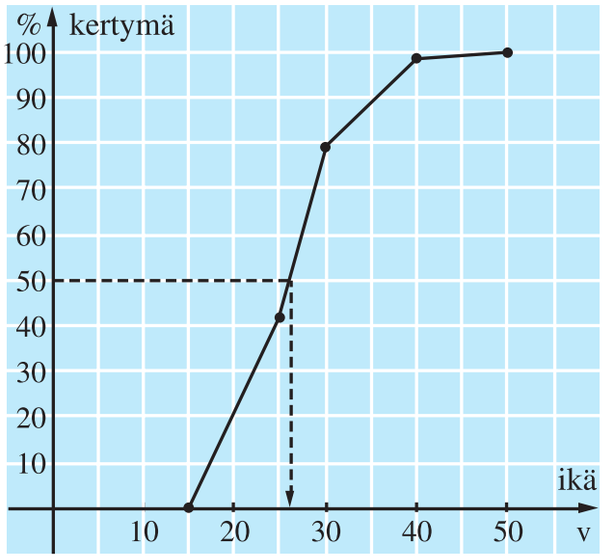
Muiden pylväiden korkeudet ovat

$$\frac{37{,}9}{5} = 7{,}58, \quad \frac{19{,}6}{10} = 1{,}96 \text{ ja } \frac{1{,}3}{10} = 0{,}013.$$



Jakauman kertymäkuvaajaa varten lasketaan suhteellisten frekvenssien kertymät käyttäen todellisia luokkarajoja.

ikä	kertymä (%)
alle 15	0
alle 25	41,2
alle 30	79,1
alle 40	98,7
alle 50	100,0

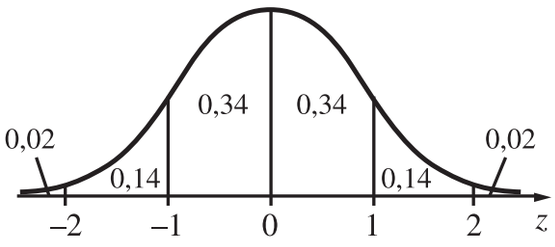


Jakauman kertymäkuvaajasta nähdään, kuinka suuri osa jakaumasta jää kunkin kohdan alapuolelle.

Kertymäkuvaajasta ilmenee, että puolet synnyttäjistä oli 26-vuotiaita tai tätä nuorempia, eli synnyttäjien mediaani-ikä on 26.

Normaalijakauma

Normaalijakauma on jatkuva todennäköisyysjakauma. Todennäköisyydet ovat jakaumaa kuvaavan käyrän (tiheysfunktion kuvaajan) ja vaaka-akselin rajaamia pinta-aloja.



Kuviossa on normitettu normaalijakauma, jonka odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1. Jos satunnaismuuttuja Z noudattaa normitettua normaalijakaumaa, niin esimerkiksi

$$P(Z \leqslant -1) \approx 0{,}02 + 0{,}14 = 0{,}16.$$

Jokaiseen normaalijakaumaan liittyvät todennäköisyydet voidaan laskea normitetun normaalijakauman avulla.

Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa odotusarvona μ ja keskihajontana σ.

Satunnaismuuttujan X arvoa x vastaava normitettu arvo on

$$z = \frac{\text{poikkeama odotusarvosta}}{\text{keskihajonta}}$$

$$= \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Tällöin

$$P(X \leqslant x) = P(Z \leqslant z) = \Phi(z),$$

missä satunnaismuuttuja Z noudattaa normitettua normaalijakaumaa ja $\Phi(z)$ on normitetun normaalijakauman kertymäfunktion arvo kohdassa z.

Funktion Φ arvot positiivisilla muuttujan z arvoilla saadaan taulukosta. Negatiivisilla arvoilla käytetään symmetriaa:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z).$$

Olkoon satunnaismuuttuja X satunnaisesti valitun seitsemänvuotiaan tytön pituus. Seitsemänvuotiaiden tyttöjen pituus noudattaa likimain normaalijakaumaa keskiarvona 125,2 cm ja keskihajontana 6,9 cm.

Huvipuistoon pääsevät ilmaiseksi lapset, jotka voivat selkä suorana kävellä 120 cm:n korkeudella olevan tangon ali. Lasketaan, kuinka monta prosenttia seitsemänvuotiaista tytöistä pääsee huvipuistoon ilmaiseksi. On siis laskettava todennäköisyys $P(X \leqslant 120)$.

Satunnaismuuttujan X arvoa 120 vastaava normitettu arvo on

$$z = \frac{120 - 125{,}2}{6{,}9} \approx -0{,}75.$$

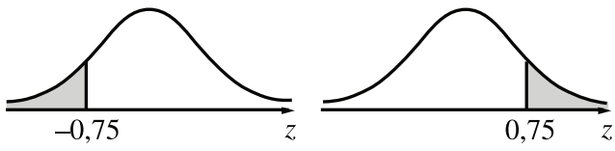
Siis

$$P(X \leqslant 120) \approx P(Z \leqslant -0{,}75) = \Phi(-0{,}75).$$

Käyttämällä hyväksi normaalijakauman symmetriaa saadaan:

$$\Phi(-0{,}75) = 1 - \Phi(0{,}75) \approx 1 - 0{,}7734$$

$$\approx 0{,}23.$$



Seitsemänvuotiaista tytöistä 23 % pääsee huvipuistoon ilmaiseksi.

Määritetään edelleen, mikä pituusrajan tulisi olla, jotta 90 % seitsemänvuotiaista tytöistä pääsisi ilmaiseksi sisään.
On siis määritettävä sellainen pituus x, että

$$P(X \leqslant x) = 0{,}9$$

eli

$$P\left(Z \leqslant \frac{x - 125{,}2}{6{,}9}\right) = 0{,}9.$$

Määritetään taulukosta z niin, että $\Phi(z) = 0{,}90$.
Lähinnä on arvo $z = 1{,}28$.

Siis:

$$\frac{x - 125{,}2}{6{,}9} = 1{,}28 \qquad | \cdot 6{,}9$$

$$x - 125{,}2 = 1{,}28 \cdot 6{,}9$$

$$x = 125{,}2 + 1{,}28 \cdot 6{,}9 \approx 134$$

Jotta 90 % seitsemänvuotiaista tytöistä pääsisi ilmaiseksi sisään, pituusrajaksi tulisi asettaa 134 cm.

KERTAUSTEHTÄVIÄ

Tehtävät ovat kertausluvun otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä.

TODENNÄKÖISYYS

351. Heitetään säännöllisen nelitahokkaan (tetraedrin) muotoista noppaa, jonka tahkoissa on silmäluvut 1–4, ja säännöllisen kahdeksantahokkaan (oktaedrin) muotoista noppaa, jonka tahkoissa on silmäluvut 1–8. Millä todennäköisyydellä

a) silmälukujen summa on 6

b) nelitahokkaan silmäluku on suurempi?

352. Erään hiirilajin elinikää tutkittaessa saatiin seuraava tilasto.

aika (vuosia)	0	1	2	3	4	5
vielä elossa	100 %	72 %	66 %	31 %	8 %	0 %

Laske tämän aineiston perusteella todennäköisyys, että

a) hiiri elää ainakin kaksivuotiaaksi

b) hiiri elää kaksi- mutta ei kolmevuotiaaksi

c) yhden vuoden iän saavuttanut hiiri elää vielä ainakin kaksi vuotta

d) neljän vuoden iän saavuttanut hiiri elää vielä ainakin kaksi vuotta.

353. Arvotaan kaksi satunnaislukua, toinen luku väliltä $[-1, 1]$ ja toinen väliltä $[-2, 1]$. Millä todennäköisyydellä lukujen summa on positiivinen?

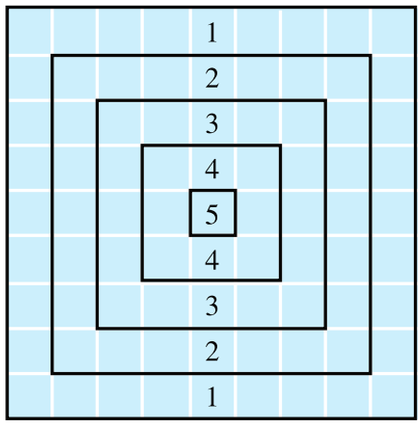
354. Lattialaatat ovat kooltaan 100 mm × 100 mm, ja laattojen välissä on 6 mm leveä sauma. Millä todennäköisyydellä lattialle heitetty yhden euron kolikko on kokonaan yhdellä laatalla? Kolikon halkaisija on 23,8 mm.

355. Paikasta, jonka etäisyys viivasuorasta maantiestä on 15 km, lähdetään aamulla umpimähkäiseen suuntaan ja kuljetaan suoraan. Päivämatka on 20 km. Millä todennäköisyydellä päivän aikana kohdataan maantie?

SATUNNAISMUUTTUJA

356. Jäljellä on 15 arpaa, joista kahdella saa 10 euroa ja yhdellä 25 euroa. Mikko ostaa yhden 2 euron hintaisen arvan. Olkoon satunnaismuuttuja X Mikon voitto. Määritä satunnaismuuttujan X a) jakauma b) odotusarvo c) keskihajonta.

357. Harpin kärki osuu ruudukkoon merkityn maalitaulun satunnaiseen kohtaan niin, että kaikki kohdat ovat yhtä mahdollisia. Laske pistemäärän odotusarvo.



KOMBINATORISET MENETELMÄT

358. Työpaikan ravintolan lounaslistalla on joka päivä samat seitsemän ruokalajia. Päivittäin ravintolassa syövä Kari valitsee ruokalajin aina arpomalla. Millä todennäköisyydellä hän syö työviikon jokaisena viitenä päivänä eri ruokaa?

359. Noppaa heitetään viisi kertaa. Kannattaako lyödä vetoa sen puolesta, että mikään silmäluku ei tule kahta kertaa peräkkäin?

360. Pakasta vedetään kortteja yksitellen, kunnes saadaan kaksi saman maan korttia.
a) Kuinka monta korttia enintään joudutaan vetämään?
b) Laske kaikkien mahdollisten lukumäärien todennäköisyydet.
c) Laske vedettävien korttien lukumäärän odotusarvo.

361. Lottoriviin arvotaan seitsemän numeroa lottonumeroista 1–39. Monet rakentavat lottorivinsä läheistensä merkkipäivistä. Millä todennäköisyydellä oikean lottorivin kaikki numerot ovat merkkipäivänumeroita 1–31?

362. Opettaja jakaa umpimähkään kahdeksalle oppilaalle vierekkäiset teatteriliput. Millä todennäköisyydellä Liisa ja Veera pääsevät istumaan vierekkäin?

363. Kissanpennuista viisi on tyttökissoja ja kolme poikakissoja. Millä todennäköisyydellä umpimähkään valitut kaksi kissanpentua ovat
a) molemmat tyttökissoja b) eri sukupuolta?

364. Rasiasta, jossa on 15 valkoista ja 12 mustaa palloa, nostetaan umpimähkään viisi palloa. Millä todennäköisyydellä saadaan kolme valkoista ja kaksi mustaa palloa?

365. Viking-loton riviin arvotaan kuusi numeroa numeroista 1–48. Mikä on todennäköisyys saada yhdellä rivillä neljä oikein?

TODENNÄKÖISYYKSIEN LASKUSÄÄNTÖJÄ

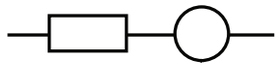
366. Kuusista sukkahousuista kahdet ovat rikkinäiset. Tiina pakkaa kiireessä mukaansa kolmet sukkahousut. Millä todennäköisyydellä mukaan tulee
a) pelkästään ehjiä sukkahousuja
b) ainakin yhdet rikkinäiset sukkahousut?

367. Hämärässä huoneessa on 10 henkilöä, joista kukin kirjoittaa lapulle yhden korttipakan 52 kortista ajateltuaan sitä ensin intensiivisesti. Ajatuksensiirtokoe on onnistunut, jos ainakin kahdella on sama kortti. Mikä on kokeen onnistumisen todennäköisyys?

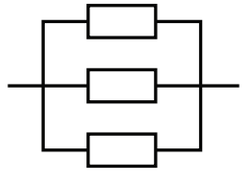
368. Matkalippujen tarkastajat tutkivat satunnaisesti valiten keskimäärin joka 300. matkustajan liput. Millä todennäköisyydellä henkilö, joka kulkee edestakaisen työmatkansa ilman matkalippua, jää vuoden aikana kiinni? Henkilöllä on vuodessa 220 työpäivää.

369. Suomalaisista 17 % kuuluu B-veriryhmään. Kuinka suuri tulee satunnaisesti kootun suomalaisryhmän vähintään olla, jotta todennäköisyys, että ainakin yksi ryhmän jäsen kuuluu B-veriryhmään, olisi suurempi kuin 0,90?

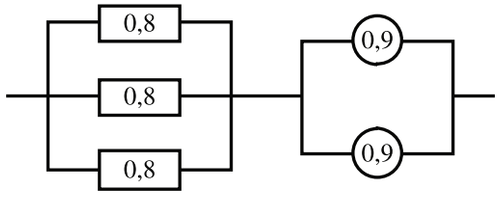
370. Jos laitteen komponentit (osat) on kytketty peräkkäin, niin yhden komponentin särkyessä koko laite lakkaa toimimasta.



Joskus toiminnan varmistamiseksi samanlaisia komponentteja kytketään rinnakkain.
Tällöin laite toimii niin kauan kuin yksikin komponentti toimii.



Seuraavan laitteen kuhunkin komponenttiin on merkitty todennäköisyys, että komponentti toimii vuoden ajan. Millä todennäköisyydellä koko laite toimii vuoden ajan?



371. Rengastetuista kanahaukoista tavataan myöhemmin noin 15 % ja pajulinnuista noin 0,1 %. Lintuharrastaja on kesän aikana rengastanut 10 kanahaukan poikasta ja 120 pajulinnun poikasta.
a) Millä todennäköisyydellä ainakin yksi linnuista tavataan myöhemmin?
b) Millä todennäköisyydellä tavataan ainakin yksi kanahaukka ja ainakin yksi pajulintu?

372. Pakasta nostetaan kaksi korttia. Millä todennäköisyydellä molemmat kortit ovat kuvakortteja (sotamies, kuningatar, kuningas tai ässä) tai kortit ovat samaa maata?

373. Liisan koulumatkalla on kolmet jalankulkuvalot, joiden toiminta on toisistaan riippumatonta. Valot näyttävät vihreätä 30 %, 45 % ja 60 % ajasta. Millä todennäköisyydellä Liisa joutuu pysähtymään valoihin a) yhden kerran b) ainakin yhden kerran?

374. Ihmiset kuuluvat johonkin neljästä pääveriryhmästä A, B, AB ja O. Suomalaisista kuuluu A-veriryhmään 44 %, B-ryhmään 17 %, AB-ryhmään 8 % ja O-ryhmään 31 %. Millä todennäköisyydellä aviopuolisot kuuluvat samaan veriryhmään?

375. Lipaston laatikossa on 4 punaista ja 10 vihreää sukkaa. Millä todennäköisyydellä umpimähkään otetut kaksi sukkaa ovat samanväriset?

376. Arvioidaan, että poutapäivää seuraa poutapäivä todennäköisyydellä 0,8 ja sadepäivää seuraa sadepäivä todennäköisyydellä 0,4. Tänään on poutapäivä. Millä todennäköisyydellä ylihuomenna on poutapäivä?

TOISTOKOE

377. Vakioveikkauksessa on 13 veikkauskohdetta, joissa jokaisessa on vaihtoehdot 1, × ja 2. Voiton saa, jos on vähintään 10 oikein. Millä todennäköisyydellä arpomalla täytetyllä rivillä saa a) 10 oikein b) vähintään 10 oikein?

378. Seitsemän 20-vuotiasta miespuolista ystävystä sopivat tapaamisesta 60 vuotta myöhemmin. Millä todennäköisyydellä vähintään kaksi saapuu, tai ainakin voisi saapua, tapaamiseen? 20-vuotiaista miehistä noin 30 % saavuttaa 80 vuoden iän.

379. Suomalaisista 51 % on naisia. Millä todennäköisyydellä arvalla valitussa 10 hengen suomalaisryhmässä on yhtä monta miestä ja naista?

380. Syntyvistä lapsista 51,2 % on poikia. Millä todennäköisyydellä kuusilapsisessa perheessä on sekä tyttöjä että poikia vähintään kaksi?

TILASTOLLINEN MUUTTUJA

381. a) Laske keskiarvo ja keskihajonta frekvenssitaulukosta.
b) Havainnollista jakaumaa sopivalla diagrammilla.

x_i	f_i (%)
1	17
2	28
3	49
4	0
5	6

382. Rentoutusharjoituksen vaikutusta keskittymiskykyyn tutkittiin testillä, joka tehtiin 20 henkilön ryhmälle ennen harjoitusta ja toistettiin harjoituksen jälkeen. Testin toistossa kahden henkilön pistemäärä pieneni yhdellä, kuuden nousi yhdellä ja neljän nousi kahdella. Kuinka pistemäärän keskiarvo muuttui?

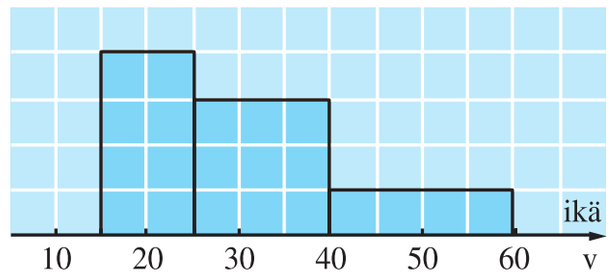
383. a) Mikä oli synnyttäjien keski-ikä vuonna 2002?
b) Havainnollista jakaumaa histogrammilla.

Synnytykset ikäryhmittäin 2002

äidin ikä	synnytyksiä (%)
15–24	19,9
25–29	31,2
30–39	45,4
40–49	3,5

(Lähde: STAKES)

384. Aikuislukion opiskelijoiden ikäjakaumaa havainnollistettiin histogrammilla.
a) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu opiskelija on alle 30-vuotias? Entä vähintään 35-vuotias?
b) Laadi jakauman frekvenssitaulukko.
c) Laadi jakauman kertymäkuvaaja ja arvioi kuvaajasta opiskelijoiden mediaani-ikä.



NORMAALIJAKAUMA

385. Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 7,2 ja keskihajonta 4,6. Määritä todennäköisyys
a) $P(X \leqslant 9{,}3)$ b) $P(X \geqslant 0{,}0)$
c) $P(0{,}0 \leqslant X \leqslant 10{,}0)$.

386. Olkoon X edellisen tehtävän satunnaismuuttuja. Määritä x niin, että
a) $P(X \leqslant x) = 0{,}86$ b) $P(X \leqslant x) = 0{,}11$.

387. 16-vuotiaiden poikien pituuden keskiarvo on 173,1 cm ja keskihajonta 7,2 cm. Pituus noudattaa likimain normaalijakaumaa. Kuinka monella prosentilla pojista pituus on
a) alle 175,0 cm b) yli 180,0 cm?

388. Kanalan munien paino noudattaa normaalijakaumaa. Painon keskiarvo on 68,1 grammaa ja keskihajonta 9,8 grammaa. Kuinka monta prosenttia kanalan munista kuuluu EU-direktiivin säätämään painoluokkaan L eli painaa 63 g – 73 g?

389. Ekaluokkalaisen Matin koulumatka kestää keskimäärin 22 minuuttia keskihajonnan ollessa 5 minuuttia. Kuinka paljon ennen koulun alkua Matti on lähetettävä matkaan, jotta myöhästymisriski olisi noin 5 %? Oletetaan, että koulumatkan kesto noudattaa normaalijakaumaa.

390. Kone voidaan säätää pakkaamaan perunoita 5–25 kg:n pusseihin. Kone on hyvin tarkka: pakkausten paino noudattaa normaalijakaumaa keskiarvona säädetty painon suuruus ja keskihajontana 115 g. Pakattaessa 10 kg:n pusseja halutaan, että pussi painaa vähintään 10 kg todennäköisyydellä 0,95. Kuinka suuri paino koneeseen tulee säätää?

391. Koneen hiomien linssien paksuus on normaalisti jakautunut keskiarvon ollessa 3,000 mm. Kuinka suuri läpimitan keskihajonta saa olla, jotta todennäköisyys, että läpimitta ylittää hylkäämisrajan 3,020 mm, olisi enintään 0,01?

TEHTÄVÄSARJOJA

SARJA A

1. Neljä ystävystä ovat kukin käyneet erikseen ostamassa matkalipun samaan junaan. Junassa on seitsemän vaunua, jokaisessa yhtä monta paikkaa. Oletetaan, että tietokone valitsee vaunun satunnaisesti. Millä todennäköisyydellä ystävysten paikat ovat kaikki eri vaunuissa?

2. Kannattaako lyödä vetoa sen puolesta, että kun kahta noppaa heitetään neljä kertaa, niin ainakin kerran tulee pari (samat silmäluvut)?

3. Lottoriviin arvotaan seitsemän numeroa lottonumeroista 1–39. Millä todennäköisyydellä lottorivin kaikki numerot ovat parittomia?

4. Niittien halkaisija noudattaa normaalijakaumaa, keskiarvo on 13,48 mm ja keskihajonta 0,11 mm. Niiteistä poistetaan kaikki, joiden halkaisija on pienempi kuin 13,39 mm. Kuinka monta prosenttia jäljelle jääneistä niiteistä on halkaisijaltaan yli 13,62 mm?

5. Kari pelaa uhkapeliä seuraavilla säännöillä. Kari arvaa jonkin korttipakan neljästä maasta ja vetää sen jälkeen pakasta kortin. Jos kortti on arvattua maata, Kari saa kortin arvon (1–13) osoittaman määrän pelimerkkejä. Jos kortti ei ole arvattua maata, Kari menettää kaksi pelimerkkiä. Mikä on Karin yhdellä kierroksella saaman voiton odotusarvo? Kannattaako Karin pelata peliä?

6. 60 minuutin kasetille äänitetään kaksi 10 minuutin pituista musiikkikappaletta niin, että kummankin kappaleen äänitys aloitetaan nauhan satunnaisesta kohdasta. Millä todennäköisyydellä molemmat kappaleet tulevat nauhalle kokonaisina menemättä lainkaan päällekkäin?

SARJA B

1. Erään maan asukkaista 52 % on ruskeasilmäisiä, 31 % sinisilmäisiä, 12 % harmaasilmäisiä ja 5 % vihreäsilmäisiä. Millä todennäköisyydellä kahdella satunnaisesti valitulla maan asukkaalla on samanväriset silmät?

2. Kumpi on todennäköisempää: että kuutta noppaa heitettäessä tulee ainakin yksi kuutonen vai että 12 noppaa heitettäessä tulee ainakin kaksi kuutosta?

3. Peräkkäisten kokonaislukujen $-3, -2, \ldots, 2, 3$ joukosta arvotaan kaksi lukua a ja b. Millä todennäköisyydellä on

a) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

b) $(a-b)^2 = a^2 - b^2$?

4. Viesti lähetetään binäärimuodossa jonona nollia ja ykkösiä välitysasemalle, joka edelleen lähettää viestin varsinaiselle vastaanottajalle. Kummassakin lähetysvaiheessa viesti saattaa välittyä virheellisenä: todennäköisyys, että viestiä lähetettäessä nolla vaihtuu ykköseksi on 0,06, ja todennäköisyys, että ykkönen vaihtuu nollaksi, on 0,04. Millä todennäköisyydellä viesti 00010101 menee oikeana perille?

5. Veikkauksen Keno-pelissä arvotaan 20 numeroa 70 numerosta. Pelaaja voi osallistua peliin eri pelitasoilla Keno-2 – Keno-10, jolloin tavoitteena on saada 2–10 numeroa oikein. Jokaista tasoa on mahdollista pelata järjestelmäpelinä merkitsemällä ruudukkoon enemmän kuin minimimäärä numeroita. Pelaaja osallistuu Keno-5 -peliin merkitsemällä ruudukkoon seitsemän numeroa. Millä todennäköisyydellä hän saa 5 oikein?

6. Palloilusarjan lopputurnauksessa kohtaavat joukkueet HIK ja HUPS. Mestariksi tulee joukkue, joka ensiksi voittaa neljä ottelua. Joukkueiden aikaisemmista keskinäisistä otteluista HIK on voittanut 65 %. Laske tämän perusteella pelattavien otteluiden odotusarvo. Oletetaan, että otteluiden lopputulokset ovat keskenään riippumattomia.

SARJA C

1. Maapallon ilmakehän yläosiin saapuu vuosittain noin 140 sellaista meteoriittia, jotka ilmakehään törmätessään räjähtävät yli puolen kilotonnin voimalla. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi meteoriiteista törmää ilmakehään Suomen yläpuolella? Maapallon pinta-ala on noin 510 miljoonaa neliökilometriä ja Suomen 340 000 neliökilometriä.

2.

x_i	f_i
0	15
1	19
2	
3	10
4	0
5	2

Frekvenssitaulukosta oli tipahtanut yksi luku pois. Onneksi muistettiin, että keskiarvo on tasan 1,5. Mikä puuttuva luku on? Laske edelleen jakauman keskihajonta.

3. Puu, jonka korkeus on 12,0 metriä, on talon 16,0 metrin pituisen seinän keskikohdan kohdalla 7,0 metrin etäisyydellä seinästä. Jos myrskytuuli katkaisee puun tyvestä, ja puu kaatuu satunnaiseen suuntaan, niin millä todennäköisyydellä puu osuu taloon?

4. Automaattivaa'an mittausvirheen keskiarvo on $-0{,}8$ g ja keskihajonta 2,6 g. Mittausvirhe noudattaa normaalijakaumaa. Millä todennäköisyydellä mittaus poikkeaa todellisesta arvosta yli 5,0 g?

5. Arpajaisissa on jäljellä 30 arpaa, joista viisi voittaa. Tiina päättää ostaa arpoja yksitellen kunnes saa kaksi voittoa. Millä todennäköisyydellä Tiina joutuu ostamaan yli kymmenen arpaa?

6. a) Todennäköisyydet, että tapahtuma A tapahtuu viisinkertaisessa toistokokeessa kolme kertaa ja että se tapahtuu yhden kerran, ovat yhtä suuret. Tapahtuma A ei ole varma eikä mahdoton. Mikä on tapahtuman A todennäköisyys yksittäisessä toistossa? Anna vastaukseksi todennäköisyyden tarkka arvo ja kolmedesimaalinen likiarvo.
b) Väliltä $[1, 2]$ arvotaan viisi satunnaislukua. Osoita, että todennäköisyys, että kolmen arvotun luvun neliö on enintään 2, on yhtä suuri kuin todennäköisyys, että yhden arvotun luvun neliö on enintään 2.

SARJA D

1. Millä todennäköisyydellä perheen kaikki kuusi lasta ovat syntyneet eri kuukausina? Perheessä ei ole kaksosia. Oletetaan (hieman todellisuuden vastaisesti), että kaikki kuukaudet ovat yhtä todennäköisiä syntymäkuukausia.

2. Koneen valmistamista tuotteista 8 % on lievästi väriviallisia ja 7 % pintaviallisia. Viat esiintyvät toisistaan riippumatta. Virheettömät tuotteet myydään A-laatuna, tuotteet, joissa on yksi virhe, B-laatuna ja tuotteet, joissa on molemmat virheet, särjetään. A-laadun tuotteesta saadaan voittoa 500 euroa ja B-laadun tuotteesta 100 euroa. Särjetystä tuotteesta tulee 10 000 euroa tappiota. Kuinka suuri on yhdestä tuotteesta saatavan voiton odotusarvo?

3. Yleisin miehille annettu etunimi 1920-luvulla oli Veikko. Tällöin nimen sai ensimmäiseksi etunimekseen 4 % syntyneistä pojista. Seurueessa on 25 henkilöä, joiden kaikkien isovanhemmat ovat syntyneet 20-luvulla. Seurueessa ei ole lähisukulaisia. Millä todennäköisyydellä vähintään kahdella seurueen jäsenistä on Veikko-niminen isoisä?

4. Suuri erä koneen valmistamia tuotteita pakattiin 12 kappaleen pakkauksiin. Myöhemmin osoittautui, että 75 %:ssa pakkauksista oli ainakin yksi viallinen tuote. Kuinka monta prosenttia koneen valmistamista tuotteista voidaan arvioida olevan viallisia?

5. Maljassa on 3 valkoista, 4 punaista ja 5 mustaa palloa. Maljasta nostetaan neljä palloa. Millä todennäköisyydellä nostettujen pallojen joukossa on jokaista väriä?

6. Tikkataulun kympin säde on 2 cm, yhdeksikön ulkoreunan säde 4 cm, kahdeksikon ulkoreunan säde 6 cm jne. Kun harjoitellut heittäjä heittää tauluun, niin hänen heittämänsä tikan taulun keskipisteestä mitatulle etäisyydelle D (cm) pätee $\mathrm{P}(D \leqslant a) = \mathrm{P}(-a \leqslant X \leqslant a)$, missä satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on nolla. Kaapo on harjoitellut kovasti, ja hän osuu vähintään seitsemään 75 %:lla heitoista. Kuinka monella prosentilla heitoista Kaapo osuu kymppiin tai yhdeksään?

SARJA E

1. Siemenpussin siemenistä 20 % on siemeniä, joiden itämistodennäköisyys on 0,90, ja loput siemeniä, joiden itämistodennäköisyys on 0,70. Millä todennäköisyydellä pussista umpimähkään otettu siemen itää?

2. Kaikkien suomalaisten joukosta arvotaan 15-jäseninen toimikunta. Millä todennäköisyydellä toimikuntaan tulee miesenemmistö, mutta naisia on kuitenkin vähintään tasa-arvolain edellyttämä 40 %? Kaikista suomalaista 51 % on naisia.

3. Laulukuorossa on 30 jäsentä. Kuorolaisten keskuudesta valitaan arvalla kuuden hengen ryhmä järjestämään pikkujoulua ja taas keväällä kuuden hengen ryhmä järjestämään kevätjuhlaa. Millä todennäköisyydellä ryhmillä on ainakin yksi yhteinen jäsen?

4. Erään sähkölampun kestoaika noudattaa normaalijakaumaa keskiarvona 1 000 tuntia ja keskihajontana 200 tuntia. Olohuoneen kattovalaisimen kaikki neljä lamppua vaihdetaan uusiin syyspäiväntasauksen aikaan, minkä jälkeen syksyn ja talven aikana lamput palavat keskimäärin viisi tuntia vuorokaudessa. Millä todennäköisyydellä kevätpäiväntasaukseen mennessä (180 vuorokauden aikana) yhtään lamppua ei tarvitse vaihtaa?

5. Ikäluokkaan 20–24 kuuluvista suomalaisista miehistä 5,2 % ja naisista 11,9 % on naimisissa. Koolla on ikäluokkaan kuuluvien joukosta arvottu ryhmä, jossa on kahdeksan miestä ja viisi naista. Millä todennäköisyydellä ryhmän jäsenistä vähintään kaksi on naimisissa?

6. Heitetään kolmea noppaa. Mikä on suurimman silmäluvun odotusarvo?

Vastaukset

Todennäköisyys

1. a) $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$ b) $\frac{1}{2} = 0{,}5$

c) $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$ d) $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$

e) 1 f) 0

2. a) $\frac{1}{13} \approx 0{,}077$

(Pakassa on 52 korttia, joista 4 on ässiä. Todennäköisyys on $\frac{4}{52}$.)

b) $\frac{1}{4} = 0{,}25$ $(\frac{13}{52})$

c) $\frac{4}{13} \approx 0{,}31$ $(\frac{16}{52})$

d) $\frac{1}{52} \approx 0{,}019$

3. a) $\frac{5}{24} \approx 0{,}21$

b) $\frac{1}{24} \approx 0{,}042$

c) $\frac{1}{8} = 0{,}125$

4. a) Jos kaksi muuta jäsentä nimetään J ja K, niin parit ovat HI, HJ, HK, IJ, IK ja JK. Kaikki parit ovat yhtä mahdollisia.

a) $\frac{1}{2} = 0{,}5$ (Suotuisat alkeistapaukset ovat HI, HJ ja HK.)

b) $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$ (Suotuisat alkeistapaukset ovat HJ ja HK.)

c) $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$ (Suotuisa alkeistapaus on HI.)

d) Ainakaan toinen Hannusta ja Iineksestä ei pääse telttaan. Todennäköisyys on $\frac{5}{6} \approx 0{,}83$.

5. a) $\frac{3}{5} = 0{,}6$ b) $\frac{3}{10} = 0{,}3$ c) $\frac{3}{10} = 0{,}3$

(Nimetään seurueen muutkin jäsenet esimerkiksi J, K ja L. Kaikki mahdolliset arvotut kolmikot ovat aakkosjärjestyksessä lueteltuina HIJ, HIK, HIL, HJK, HJL, HKL, IJK, IJL, IKL ja JKL. Kaikki kolmikot ovat yhtä mahdollisia, ja niiden lukumäärä on 10.)

6. Todennäköisyys on $\frac{1}{2}$.

Vain d-kohdan väite pätee.

7. a) 0,40
b) 0,59 (Oppilaita, jotka harrastavat liikuntaa tai musiikkia, on 186 + 136 – 74.)

8. a) mies 0,81 ja nainen 0,93
b) mies 0,70 ja nainen 0,44

9. a) 0,88 b) 0,26 c) 0,45

10. $\frac{12}{365} \approx 0{,}033$

11. a) $\frac{12}{51} \approx 0{,}24$ b) $\frac{13}{51} \approx 0{,}25$

c) $\frac{3}{51} \approx 0{,}059$ d) $\frac{4}{51} \approx 0{,}078$

12. a) samaa maata

(todennäköisyydet $\frac{10}{49}$ ja $\frac{9}{49}$)

b) samanarvoinen

(todennäköisyydet $\frac{9}{48}$ ja $\frac{12}{48}$)

13. a) 0,82 b) 0,96 c) 0,85
(Kaikkien suksien määrästä a on $0{,}96a$ myyntiin kelpaavia ja $0{,}82a$ A-laatua.)

14. a) Nimetään sukat esimerkiksi A, B, C ja D, missä kaksi ensimmäistä ja kaksi viimeistä muodostavat parin. Alkeistapaukset (nostetut sukkakaksikot) ovat AB, AC, AD, BC, BD ja CD. (Voitaisiin myös ajatella, että sukat nostetaan yksitellen peräkkäin, ja luetella kaksikot nostojärjestyksessä. Tällöin alkeistapauksia on kaksinkertainen määrä.)

b) $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$

c) $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$

15. a) $\frac{3}{10} = 0{,}3$ (Nimetään arvat esimerkiksi A, B, C, D ja E, joista A ja B ovat voittoarpoja. Alkeistapauksia AB, AC jne. on yhteensä 10.)

b) $\frac{1}{10} = 0{,}1$

c) Ainakin toinen arvoista voittaa.

Todennäköisyys on $\frac{7}{10} = 0{,}7$.

d) Enintään toinen arvoista voittaa.

Todennäköisyys on $\frac{9}{10} = 0{,}9$.

16. Todennäköisyys on $\frac{2}{7} \approx 0{,}29$, jos oletetaan, että jokainen viikonpäivä on yhtä todennäköinen syntymispäivä. (On kuitenkin mahdollista, että synnytyssairaaloiden henkilökunnan työaikojen takia poikkeuksellisia synnytyksiä, kuten keisarileikkauksia ja käynnistettyjä synnytyksiä, tapahtuu jonkin verran enemmän arkipäivinä kuin viikonloppuna.)
Vain d-kohdan väite pitää paikkansa.

17. a) mies 0,29, nainen 0,55
b) mies 0,69, nainen 0,44
c) mies 0,53, nainen 0,38

18. a) Todennäköisyydet eivät ole samoja kaikille, vaan henkilökohtaisiin todennäköisyyksiin vaikuttavat elinolot, asuinpaikka ym. Kyseessä ovat todennäköisyydet, että kuolleiden joukosta satunnaisesti valitulla henkilöllä on ao. kuolinsyy. (Samaan tapaan pitää paikkansa, että satunnaisesti valittu suomalainen on nainen noin todennäköisyydellä 0,5, mutta tästä ei voida päätellä, että satunnaisesti valittu suomalainen poliisi on nainen todennäköisyydellä 0,5.) Samalla todennäköisyydet ovat ennusteita kyseisten kuolinsyiden osuudelle kaikista kuolinsyistä.
b) Todennäköisyys perustuu laskettuihin arvioihin asteroidin tai komeetan maahan törmäämisen todennäköisyydestä ja törmäyksen aiheuttamasta tuhosta. Vaikka törmäyksen todennäköisyys on pieni, sen aiheuttama kuolonuhrien määrä olisi suuri.
c) Eri aineiden sallittuja pitoisuusrajoja määrättäessä ei aina voida kokonaan poistaa riskejä, joita pienetkin pitoisuudet saattavat aiheuttaa aineille herkistyneille. Tietoisia riskejä joudutaan ottamaan esimerkiksi silloin, kun hyväksytään vakavien sairauksien hoitoon tarkoitettuja lääkkeitä. Kuolinsyyn todennäköisyys 1/10 000 000 tarkoittaa, että ao. syyhyn kuolee 1–2 Yhdysvaltain asukasta vuosikymmenessä.

19. a) 0,85 (Olkoon oppilaiden lukumäärä a. Oppilaanohjaukseen tyytyväisten oppilaiden määrä on $0{,}74a$ ja heistä myös opetukseen tyytyväisiä on $0{,}63a$.)
b) 0,07

20. a) 0,26 b) 0,76

21. a) 0,74 (Olkoon a kotitalouksien lukumäärä. Niiden kotitalouksien lukumäärä, joissa on pelkästään erillinen CD-soitin, on $0{,}65a - 0{,}51a = 0{,}14a$. Niiden kotitalouksien lukumäärä, joissa on sekä erillinen että yhdistelmäsoitin, on $0{,}53a - 0{,}14a = 0{,}39a$.

Todennäköisyys on $\frac{0{,}39a}{0{,}53a}$.)

b) 0,49

22. a) $\frac{33}{100} = 0{,}33$ b) $\frac{7}{100} = 0{,}07$

c) $\frac{2}{100} = 0{,}02$ d) $\frac{38}{100} = 0{,}38$

23. a) int(6 × rand) + 1

b) int(6 × rand) + int(6 × rand) + 2,

todennäköisyys on $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$.

(Ohjelmoitavat laskimet voidaan ohjelmoida toistamaan satunnaiskoetta esimerkiksi 500 kertaa ja pitämään kirjaa onnistuneiden kokeiden lukumäärästä.)

Todennäköisyyksiä alkeistapauksia laskemalla

24. a) $\frac{1}{9} \approx 0{,}11$ b) $\frac{5}{18} \approx 0{,}28$

25. a) $\frac{1}{36} \approx 0{,}028$ b) $\frac{11}{36} \approx 0{,}31$

c) $\frac{1}{9} \approx 0{,}11$ d) $\frac{5}{9} \approx 0{,}56$

e) Ainakin toinen silmäluku on pienempi kuin 5. Todennäköisyys on $\frac{8}{9} \approx 0{,}89$.

f) Kumpikin silmäluku on pienempi kuin 5. Todennäköisyys on $\frac{4}{9} \approx 0{,}44$.

26. a) $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$ b) $\frac{5}{12} \approx 0{,}42$

(Alkeistapauksia ovat parit (a, b), missä a on nopan silmäluku ja b kolikon pisteluku. Alkeistapaukset (1, 2), (2, 2), (3, 2) jne., joita on yhteensä 12 kappaletta, voidaan luetella tai merkitä koordinaatistoon.)

27. a) $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$ b) $\frac{1}{4} = 0{,}25$

(Alkeistapaukset kannattaa merkitä koordinaatistoon.)

28. a) $\frac{1}{4} = 0{,}25$ b) $\frac{1}{2} = 0{,}5$

(Mahdolliset alkeistapaukset ovat (L, L), (L, R), (R, L) ja (R, R), missä L = kLaava ja R = kRuuna.)

29. a) $\frac{3}{8} = 0{,}375$ b) $\frac{7}{8} = 0{,}875$

30. a) $\frac{1}{12} \approx 0{,}083$ (Suora kulkee pisteen (0, 5) kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$.)

b) $\frac{5}{12} \approx 0{,}42$

31. a) $\frac{1}{12} \approx 0{,}083$ (Tulee olla $-2a + b = -1$. Koordinaatistossa, jossa vaaka-akselilla on a ja pystyakselilla b, suotuisat pisteet ovat suoralla $b = 2a - 1$. Suora leikkaa b-akselin pisteessä $(0, -1)$, ja suoran kulmakerroin on 2.)

b) $\frac{1}{4} = 0{,}25$ (Tulee olla $-2a + b > -1$ eli $b > 2a - 1$. Suotuisat pisteet ovat suoran $b = 2a - 1$ yläpuolella.)

32. Anna (Todennäköisyydet ovat $\frac{6}{36}$ ja $\frac{5}{36}$.)

33. Kannattaa. (Todennäköisyys on $\frac{5}{9} \approx 0{,}56$.)

34. a) $\frac{1}{8} = 0{,}125$ b) $\frac{23}{48} \approx 0{,}48$

c) $\frac{5}{16} \approx 0{,}31$

35. a) $\frac{3}{8} = 0{,}375$ b) $\frac{5}{16} \approx 0{,}31$

c) Tulee vähintään kaksi klaavaa.

Todennäköisyys on $\frac{11}{16} \approx 0{,}69$.

(Alkeistapauksia (L, L, L, L), (L, L, L, R), (L, L, R, L) jne. on 16.)

36. $\frac{1}{18} \approx 0{,}056$ (Vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ovat kohtisuorassa, kun pistetulo $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ eli $x - 3y = 0$. Suotuisat pisteet (x, y) ovat suoralla $y = \frac{1}{3}x$.)

37. $\frac{1}{12} \approx 0{,}083$ (36:sta alkeistapauksesta (a, b) ovat suotuisia ne, joille pätee $a - b = 3$.)

38. a) Todennäköisyys on $\frac{1}{18} \approx 0{,}056$.

(Suora kulkee pisteen (3, 8) kautta, jos $8 = 3k + b$. Suotuisat alkeistapaukset voidaan päätellä tai ne löydetään piirtämällä koordinaatistoon, jonka vaaka-akselina on k ja pystyakselina b, suora $b = -3k + 8$.)

b) $\frac{1}{12} \approx 0{,}083$ (Tulee olla $-\frac{b}{k} = -2$ eli $b = 2k$.)

39. $\frac{19}{36} \approx 0{,}53$ (36:sta alkeistapauksesta (p, q) ovat suotuisia ne, joille pätee $p^2 - 4q \geqslant 0$ eli $q \leqslant \frac{1}{4}p^2$. Suotuisia ovat siis alkeistapaukset, jotka ovat paraabelilla $q = \frac{1}{4}p^2$ tai sen alapuolella.)

Geometrinen todennäköisyys

40. a) 0,17 b) 0,5

41. 0,40

42. 0,39

43. 0,32 (Kulman $90° + \alpha$, missä $\tan\alpha = \frac{2}{4}$, suhde täysikulmaan $360°$.)

44. 0,34 (Tutkitaan, mihin kolikon keskipisteen tulee asettua.)

45. a) 0,25 b) 0,375
c) 0,44 (Pisteet ovat suoran $y = x + 20$ yläpuolella tai suoran $y = x - 20$ alapuolella.)

46. 0,28 (Neliöstä $0 \leqslant x \leqslant 4$ ja $0 \leqslant y \leqslant 4$ suoran $x + y = 5$ yläpuolelle jäävän osan pinta-alan suhde neliön pinta-alaan.)

47. $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$

48. a) $\frac{7}{15} \approx 0{,}47$ b) $\frac{2}{5} = 0{,}4$

49. 0,55

50. 0,30

51. a) 0,64 (Katkaisukohta on välin [0, 25] osavälillä [0, 8] tai [17, 25].)
b) 0,12 (Katkaisukohta on välillä [11, 14].)

52. $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$

53. a) $\frac{7}{8} = 0{,}875$ b) $\frac{3}{4} = 0{,}75$

54. $\frac{3\pi}{16} \approx 0{,}59$ (Pisteet (x, y), missä x ja y ovat arvotut luvut, ovat epäyhtälöiden $-2 \leqslant x \leqslant 2$ ja $-2 \leqslant y \leqslant 2$ määräämässä neliössä. Pisteet, joiden koordinaattien neliöiden summa on pienempi kuin 3, ovat origokeskisessä ympyrässä.)

55. a) 0,10 (Keskipisteen on osuttava neliön johonkin kärkeen piirrettyyn neljännesympyrään, jonka säde on 0,9 cm.)
b) 0,028

56. $\frac{3}{7} \approx 0{,}43$ (Valitaan kiintopisteeksi janan toinen pää. Jos x on leikkauskohdan etäisyys tästä päästä, niin $0 < x < 7$. Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}x(7-x)$. Ratkaistaan toisen asteen epäyhtälö $\frac{1}{2}x(7-x) > 5$.)

57. 0,914 (Yhtälöllä ei ole juuria, kun sen diskriminantti on negatiivinen.)

58. a) $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$

b) Lasketaan lausekkeen $\text{rand}^2 + \text{rand}^2$ arvo esimerkiksi 100 kertaa, lasketaan alle ykkösen jäävien arvojen osuus ja kerrotaan tulos neljällä. Tehtävän laatija sai tällä tavoin π:lle likiarvon 3,2.

59. a) Todennäköisyys, että epäyhtälöiden $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ja $0 \leqslant y \leqslant 1$ määräämästä suorakulmiosta arvottu piste on alueessa, on $\frac{A}{2}$, missä A on alueen pinta-ala. Arvottu piste on alueessa, jos $y \leqslant 1 - x^2$ eli $x^2 + y \leqslant 1$. Lasketaan lausekkeen $(2 \times \text{rand} - 1)^2 + \text{rand}$ arvoja, lasketaan korkeintaan ykkösen suuruisten arvojen osuus ja kerrotaan tulos kahdella. Pinta-alan oikea arvo on $\frac{4}{3}$. Symmetrian vuoksi voidaan myös tutkia neliötä $0 \leqslant x \leqslant 1$ ja $0 \leqslant y \leqslant 1$ ja laskea lausekkeen $\text{rand}^2 + \text{rand}$ arvoja, jolloin saadaan arvio kysytyn pinta-alan puolikkaalle.

b) Jos esimerkiksi väliltä $[0, 2]$ arvotaan luku, niin todennäköisyys, että luvun neliö on pienempi kuin 3, on $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Voidaan siis laskea lausekkeen $(2 \times \text{rand})^2$ arvoja, laskea alle kolmen jäävien arvojen osuus ja kertoa tulos kahdella. Tehtävän laatija sai tällä tavoin sadalla toistolla likiarvon 1,76. ($\sqrt{3} \approx 1{,}732$)

Satunnaismuuttujan odotusarvo

60. a) mahdolliset arvot 3 ja -4,
$P(X = 3) = \frac{1}{2}$ ja $P(X = -4) = \frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2}$ tulitikkua $(\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-4))$

c) Pitkän päälle Aino häviää. 200 kierroksen jälkeen Aino on häviöllä noin 100 tikkua.

61. $15\frac{1}{6}$ $(\frac{1}{6} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^2 + \ldots) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + \ldots)$

62. On. (Jos satunnaismuuttuja X on Ainon voitto yhdellä kierroksella, niin X:n jakauma on:
$P(X = -4) = \frac{1}{3}$ ja $P(X = 2) = \frac{2}{3}$.
Satunnaismuuttujan ”Matin voitto” arvot ovat X:n arvojen vastalukuja, ja todennäköisyydet ovat samat.)

63. $-0{,}50$ euroa $(\frac{19}{20} \cdot (-2) + \frac{1}{20} \cdot 28)$

64. 7

65. 2,1 (Viitosen todennäköisyys on $\frac{1}{9}$, kolmosen $\frac{3}{9}$ ja ykkösen $\frac{5}{9}$.)

66. a) $\frac{1}{9} \approx 0{,}11$ euroa
$(\frac{1}{6} \cdot (\frac{20}{3} - 1) + \frac{5}{6} \cdot (-1)$ euroa)

b) $-\frac{2}{27} \approx -0{,}074$ euroa
$(\frac{1}{6} \cdot (-1) + \frac{5}{6} \cdot (\frac{20}{18} - 1)$ euroa)

c) kuutosen puolesta

67. a) 1 310 euroa (Olkoon s vakuutusmaksu. Vakuutuksen odotusarvon vakuutusyhtiön kannalta tulee olla positiivinen, eli tulee olla $\frac{979}{992}s + \frac{13}{992}(s - 100\,000) > 0$.)
b) 3 550 euroa
c) 5 822 euroa
d) 15 773 euroa

68. a) 925 euroa b) 55 500 euroa

69. a)

voitto (tulitikkua)	todennäköisyys
5	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{2}$
-10	$\frac{1}{4}$

b) $-0{,}25$ tulitikkua. Pitkän päälle Eino jää tappiolle. Tappion suurus on noin 0,25 tulitikkua pelattua pelikierrosta kohden.

70. Odotusarvo on $-0{,}83$ pelimerkkiä/kierros, joten 50 kierroksen jälkeen pelaaja on noin 40 merkkiä tappiolla.

71. a) -40 euroa $(0{,}12 \cdot 7000 + 0{,}88 \cdot (-1000))$
b) 40 euroa

72. Kannattaa. (Voiton odotusarvo yhdellä kierroksella on 0,25 euroa.)

73. 0,93 (Luvun x neliön kokonaisosa on 0, jos $0 < x < 1$, kokonaisosa on 1, jos $1 \leqslant x < \sqrt{2}$, jne. Peliä voi pelata näppäilemällä $\text{int}((2 \times \text{rand})^2)$.)

74. $0 < s < 5$
(A:n voiton odotusarvo on $\frac{5}{6}s - \frac{1}{6}s^2$.)

75. suuremmaksi kuin 35 euroa
(Olkoon satunnaismuuttuja X A:n voitto yhdellä kierroksella. Olkoon s kysytty rahamäärä. Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat -3, -4, ..., -11 ja s. Tulee olla $E(X) > 0$.)

76. Kaksi lehteä, jolloin voiton odotusarvo on 2,00 euroa.
(Myyntivoiton odotusarvot myytäväksi hankittujen lehtien lukumäärillä 0–4 ovat:
0 lehteä 0 €, 1 lehti 1,50 €, 2 lehteä 2 €,
3 lehteä 1,00 € ja 4 lehteä $-1{,}50$ €.)

77. On.

78. nolla tulitikkua (Peli on siis ns. reilu peli.)

Tuloperiaate

79. 216

80. 11 880

81. 40 353 607 (Valitaan ensimmäisen loven syvyys: 7 vaihtoehtoa, valitaan toisen loven syvyys: 7 vaihtoehtoa jne.)

82. a) 344 064 b) $\frac{1}{344\,064} \approx 2{,}9 \cdot 10^{-6}$
c) 225 225 d) 0,65

83. a) 0,11 $\left(\frac{52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}\right)$
b) 0,094 $\left(\frac{52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13}{52^4}\right)$

84. Kannattaa, sillä todennäköisyys on $\frac{5}{9} \approx 0{,}56 > 0{,}5$.

85. Kannattaa, sillä todennäköisyys on noin $0{,}60 > 0{,}5$.
(Ensin lasketaan vastatapahtuman ”kaikki eri maata” todennäköisyys.)

86. 0,34 (Ensin lasketaan vastatapahtuman ”yksikään ei ole ässä” todennäköisyys.)

87. a) 0,0050 $\left(\frac{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}\right)$

b) 0,0025

88. 0,49 (Lasketaan ensin vastatapahtuman ”ei yhtään voittoa” todennäköisyys.)

89. 0,31

90. a) $\frac{1}{5} = 0{,}2$ $\left(\frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3}\right)$

b) 4,00 euroa (Jos satunnaismuuttuja X on arpojen ostoon kuluva rahamäärä, niin $P(X = 2) = 0{,}4$, $P(X = 4) = 0{,}3$, $P(X = 6) = 0{,}2$, $P(X = 8) = 0{,}1$.)

91. ensimmäisessä 8 hevosta ja toisessa 13 (Jos n on hevosten lukumäärä ensimmäisessä lähdössä, niin $(n + 5)(n + 4) = n(n - 1) + 100$.)

92. 7 880 400

93. 1 889 568 sarjaa

94. 32 eri tavalla

95. 77 (Jos n on jäsenten lukumäärä, niin $n(n - 1) = 5\,852$.)

96. a) $\frac{2}{9} \approx 0{,}22$ b) $\frac{2}{5} = 0{,}4$

97. a) 0,00198 b) 0,998

98. Kannattaa, sillä todennäköisyys on $0{,}59 > 0{,}5$. (Lasketaan ensin vastatapahtuman ”yksikään korteista ei ole pata” todennäköisyys.)

99. 0,72 (Ensin lasketaan vastatapahtuman ”kaikki eri silmälukuja” todennäköisyys.)

100. a) $\frac{2}{47} \approx 0{,}043$ b) $\frac{5}{47} \approx 0{,}11$ c) 0,89

101. 0,75

102. a) 0,30 b) 0,70

103. a) 0,85 b) 0,41

104. 0,082 $\left(\frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 13}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}\right)$

105. 2,93 (Esimerkiksi kolme sukkaa nostetaan todennäköisyydellä $\frac{36 \cdot 24 \cdot 22}{36 \cdot 35 \cdot 34}$.)

106. 3,77 (Esimerkiksi kolme heittoa tarvitaan todennäköisyydellä $\frac{6 \cdot 5 \cdot 2}{6^3}$.)

107. $\frac{5}{72} \approx 0{,}069$ (Erilaisten alkeistapausten (jonojen abc) lukumäärä on 6^3. Funktiolla on nollakohta -1, kun $a - b + c = 0$. Lasketaan esimerkiksi niiden alkeistapausten määrä, joille pätee $b = a + c$.)

108. a) $\frac{4}{663} \approx 0{,}0060$ (Erilaisia kahden kortin jonoja on $52 \cdot 51$. Erilaisia suotuisia jonoja on $4 \cdot 4$.)

b) $\frac{32}{633} \approx 0{,}048$

Järjestysten lukumäärä

109. a) 6 b) 24
c) 5 040 d) 479 001 600
e) 6 402 373 705 728 000 $\approx 6{,}4 \cdot 10^{15}$

110. 1 910 vuoden kuluttua

111. $\frac{1}{720} \approx 0{,}0014$

112. $\frac{1}{60} \approx 0{,}017$

113. a) 720 (6!) b) 720 c) 120

114. 14 400 (5! · 5!)

115. 0,0048 $\left(\frac{6! \cdot 4!}{10!}\right)$

116. noin $1{,}3 \cdot 10^{15}$ (Tulo $52 \cdot 51 \cdot ... \cdot 44$ voidaan laskea näppäilemällä sellaisenaan tai osamääränä $\frac{52!}{43!}$ tai laskimen näppäimellä nPr näppäilemällä 52 nPr 9.)

117. $\frac{50!}{35!} \approx 2{,}9 \cdot 10^{24}$

118. a) $6{,}4 \cdot 10^{15}$ b) $3{,}0 \cdot 10^{24}$

119. 0,60 (Lasketaan ensin vastatapahtuman "yksikään arpa ei voita" todennäköisyys $\frac{46 \cdot 45 \cdot \ldots \cdot 37}{50 \cdot 49 \cdot \ldots \cdot 41}$. Lausekkeen arvo voidaan laskea kertomien avulla tai käyttämällä laskimen näppäintä nPr näppäilemällä 46 nPr 10 ÷ 50 nPr 10.)

120. a) $7! = 5\,040$ (Valitaan ensin paikka yhdelle vieraalle, loput 7 voidaan sijoittaa 7! eri tavalla.)
b) 144 (Valitaan ensin paikka yhdelle naiselle ja kierretään pöydän ympäri sijoittaen vuoroin miehiä ja naisia.)

121. a) $7{,}0 \cdot 10^{22}$ vuotta
b) $1{,}7 \cdot 10^{22}$ km (Pinon korkeus on 1,8 miljardia valovuotta.)

122. a) 3 628 800 b) noin $1{,}1 \cdot 10^{28}$

123. noin $8{,}1 \cdot 10^{67}$

124. noin 77 000 vuotta

125. $\frac{119}{120} \approx 0{,}99$ (Lasketaan ensin vastatapahtuman "jokainen saa oman hattunsa" todennäköisyys.)

126. $\frac{1}{21} \approx 0{,}048$

127. a) $\frac{1}{5} = 0{,}2$ b) $\frac{1}{10} = 0{,}1$

128. $\frac{1}{3\,360} \approx 0{,}00030$

129. $2{,}7 \cdot 10^{39}$

130. 0,70

131. 23 (Vastatapahtuman "kaikki syntyneet eri päivinä" todennäköisyyden tulee olla pienempi kuin 0,5. Kokeilemalla nähdään, että lausekkeen $\frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - (k-1))}{365^k}$ arvo alittaa 0,5 ensimmäisen kerran, kun $k = 23$. Lausekkeen arvo kannattaa laskea käyttämällä laskimen nPr -näppäintä. Kun lisäksi käytetään laskimen Entry -näppäintä, lauseketta ei tarvitse joka kerta näppäillä uudelleen.)

132. a) 120 (Erilaisten tunnusten lukumäärä on 9 990. Joillakin laskimilla voidaan löytää tarkka tulos systemaattisella kokeilulla. Tarkka tulos on 118.)
b) vähintään noin 290 000 työntekijän yrityksessä (Erilaisten salasanojen lukumäärä on 62^6.)

133. a) 7 b) 24
(Tekijänä olevien viitosten lukumäärä.)

134. Kun $2 \leqslant k \leqslant 20$, niin summa $20! + k$ on jaollinen luvulla k, sillä luku k on molempien yhteenlaskettavien tekijä. Siis luku $20! + k$ ei ole alkuluku. Samalla tavalla nähdään, että mikään n luvusta $(n+1)! + 2$, $(n+1)! + 3$, ..., $(n+1)! + n + 1$ ei ole alkuluku.

a) 40 322, 40 323, 40 324, 40 325, 40 326, 40 327, 40 328

b) $1\,000\,001! + 2$, $1\,000\,001! + 3$, ..., $1\,000\,001! + 1\,000\,001$

Osajoukkojen lukumäärä

135. 495

136. 2 598 960

137. On, sillä luokasta voidaan muodostaa 210 eri järjestäjäparia.

138. a) 455 126 b) 23 751 c) 0,052

139. a) $\frac{1}{12\,271\,512} \approx 8{,}1 \cdot 10^{-8}$
b) 0,43 c) 0,57

140. a) 8 riviä, hinta 5,60 euroa
b) 36 riviä, hinta 25,20 euroa
c) 330 riviä, hinta 231,00 euroa

141. 0,34 (Lasketaan ensin vastatapahtuman ”yksikään huoneista 5, 6 ja 7 ei ole vapaana” todennäköisyys eli todennäköisyys, että kolme vapaata huonetta ovat muita huoneita. Todennäköisyys voidaan laskea käyttämällä alkeistapauksina kolmen huoneen osajoukkoja tai kolmen huoneen jonoja.)

142. $\frac{1}{4} = 0{,}25$ (Kahden huoneen osajoukkoja on $\binom{8}{2}$. Käyttämällä apuna esimerkiksi kuviota nähdään, että näistä 7 muodostuu vierekkäisistä huoneista.)

143. a) 4 321 642 626 (Jos laskimessa ei ole näppäintä nCr, lasketaan $\binom{569}{4} = \frac{569 \cdot 568 \cdot 567 \cdot 566}{4!}$. Binomikertoimen $\binom{569}{4}$ arvon laskeminen muodossa $\frac{569!}{4! \cdot 565!}$ ei onnistu useimmilla laskimilla.)
b) 4 321 642 626 (Jos laskimessa ei ole näppäintä nCr, lauseke $\binom{569}{565} = \frac{569!}{565! \cdot 4!}$ supistetaan tekijällä 565!, jolloin saadaan $\binom{569}{565} = \frac{569 \cdot 568 \cdot 567 \cdot 566}{4!}$.
Tulos on sama kuin a-kohdassa, sillä oppilaat voidaan valita linja-autoihin niin, että valitaan ne neljä oppilasta, jotka jäävät koululle.)

144. $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, 4 950

145. $\frac{n(n-3)}{2}$, 405 (Lävistäjä voidaan valita niin, että valitaan lävistäjän alkupiste (n vaihtoehtoa) ja loppupiste ($n - 3$ vaihtoehtoa). Jokainen lävistäjä tulee näin valituksi kahteen kertaan.)

146. a) 136 ($\binom{17}{2} = \frac{17 \cdot 16}{2}$)
b) 493 (Valitaan ensin poika ja sitten tyttö. Jokainen pari tulee valituksi vain yhden kerran.)

147. a) 91 b) 64 684 950

148. noin $6{,}35 \cdot 10^{11}$ eli 635 miljardia

149. 42 (Jos vieraiden lukumäärä on n, niin kättelyjen määrä on $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Ratkaistaan toisen asteen yhtälö.)

150. a) 1 712 304 b) 0,63

151. 10 295 472 lottoriviä, 7 oikein todennäköisyydellä $\frac{1}{10\,295\,472} \approx 9{,}7 \cdot 10^{-8}$, ei yhtään oikein todennäköisyydellä 0,198. Lottopeliä muutettiin, koska 7 oikein -voittoja tuli liikaa. Vastaavasti tuli liian vähän pelaajia houkuttelevia suuria voittoja ja jättipotteja, jotka kerääntyvät, kun 7 oikein -voittoja ei tule.

152. 7

153. a) 0,0000215 (Alkeistapauksiksi voidaan valita 7 numeron lottorivit, jolloin suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{11}{7}$, tai 11 numeron lottojärjestelmät, jolloin suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{32}{4}$.

Ensimmäisessä vaihtoehdossa ajatellaan, että lottorivi arvotaan lottokupongin täyttämisen jälkeen. Jälkimmäisessä ajatellaan, että oikea lottorivi on jo olemassa (mutta tuntematon), kun lottokuponkia täytetään.
Alkeistapauksiksi voidaan valita myös 7 lottonumeron jonot, joilloin suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 5$.)

b) 0,0770 (Alkeistapauksiksi voidaan valita 7 numeron lottorivit, jolloin suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{28}{7}$, tai 11 numeron lottojärjestelmät, jolloin suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{32}{11}$. Alkeistapauksiksi voidaan valita myös 7 lottonumeron jonot, jolloin suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $28 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 22$, tai 11 lottonumeron jonot, jolloin suotuisten alkeistapausten lukumäärä $32 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 22$.)
c) 0,923

154. $\frac{3}{28} \approx 0{,}11$ (Valitaan alkeistapauksiksi kolmen radan osajoukot.)

155. $\frac{7}{22} \approx 0{,}32$

156. a) $\binom{n}{0} = 1$, n alkion joukolla on yksi nollan alkion osajoukko, nimittäin tyhjä joukko.

b) $\binom{n}{1} = n$, n alkion joukolla on n kappaletta yhden alkion osajoukkoja.

c) $\binom{n}{n-1} = n$, n alkion joukolla on n kappaletta $n-1$ alkion osajoukkoja, sillä $n-1$ alkion osajoukko voidaan valita niin, että valitaan alkio, joka ei kuulu osajoukkoon.

d) $\binom{n}{n} = 1$, n alkion joukolla on yksi n alkion osajoukko, nimittäin joukko itse.

157. a) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ja

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Binomikerroin $\binom{n}{k}$ ilmaisee n alkion joukon k-alkioisten osajoukkojen lukumäärän.

Binomikerroin $\binom{n}{n-k}$ ilmaisee n alkion joukon $(n-k)$-alkioisten osajoukkojen lukumäärän. Lukumäärät ovat yhtä suuret, sillä $(n-k)$-alkioinen osajoukko voidaan muodostaa niin, että valitaan k alkiota, jotka eivät kuulu osajoukkoon.

b) $\binom{613}{610} = \binom{613}{3}$, eli saliin pääsevät voidaan valita niin, että valitaan kolme oppilasta, jotka eivät pääse saliin. (Molempien binomikertoimien arvo on 38 203 386.)

158. a) 100 (Valitaan lävistäjä niin, että ensin valitaan alkupiste ja sitten loppupiste. Jokainen lävistäjä tulee näin valituksi kahdesti.)
b) 36

159. a) $\binom{n}{2}$ b) $\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$, missä $n \geqslant 4$

435 suoraa, 82 215 leikkauspistettä

160. a) n vaiheessa, joissa jokaisessa on kaksi vaihtoehtoa.
b) 2^n

Pascalin kolmio

161. a) $x^4 + 20x^3 + 150x^2 + 500x + 625$
b) $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$

162. $243x^5 - 405x^4 + 270x^3 - 90x^2 + 15x - 1$

163. 1 8 28 56 70 56 28 8 1 ja
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

164. $19600x^{47}$ ja $1225x^2$

165. $702x^{11}$, $-14\,073\,345x^4$ ja $-1\,594\,323$

166. $945\,728\,784x^{10}$ ja $20\,127\,744x^3$

167. a) $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$= \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!}$

$= \frac{(n-k)(n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k! \cdot (n-k)!}$

$= \frac{(n-k+k)(n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$

b) n alkion joukolla $\{a_1, ..., a_{n-1}, a_n\}$ on $\binom{n}{k}$ kappaletta k alkion osajoukkoja. Lasketaan osajoukkojen lukumäärä toisin kahdessa osassa. Sellaisia k alkion osajoukkoja, joissa a_n ei ole mukana, on $\binom{n-1}{k}$, sillä joukot ovat joukon $\{a_1, ..., a_{n-1}\}$ k alkion osajoukkoja. Sellaisia k alkion osajoukkoja, joissa a_n on mukana, on $\binom{n-1}{k-1}$, sillä niihin valitaan $k-1$ alkiota joukosta $\{a_1, ..., a_{n-1}\}$.
Siis $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

168. 2^n, sillä summa saadaan, kun binomikaavaan sijoitetaan $a = b = 1$.

169. 2^n

Todennäköisyyksiä kombinatoriikan avulla

170. a) $\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20} \approx 0{,}071$

b) $\frac{\binom{15}{5}}{\binom{24}{5}} = \frac{3\,003}{42\,504} \approx 0{,}071$

171. 0,39 ($\frac{\binom{15}{3} \cdot \binom{9}{2}}{\binom{24}{5}}$, alkeistapauksia ovat viiden pullon osajoukot.)

172. a) 0,40 (Alkeistapauksiksi kannattaa valita kolmen kortin jonot.)
b) 0,60

173. $P(X = 0) = \frac{12}{65} \approx 0{,}185$

$P(X = 1) = \frac{216}{455} \approx 0{,}475$

$P(X = 2) = \frac{27}{91} \approx 0{,}297$

$P(X = 3) = \frac{4}{91} \approx 0{,}044$

$E(X) = 1{,}2$ voittoarpaa

174. 44 924 880

175. $\frac{3}{11} \approx 0{,}27$ (Suotuisten kolmen pallon joukkojen lukumäärä on $\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{1}$ eli $3 \cdot 4 \cdot 5$.)

176. 6 oikein ja lisänumero $1{,}37 \cdot 10^{-6}$
6 oikein $1{,}32 \cdot 10^{-5}$
5 oikein $6{,}77 \cdot 10^{-4}$
4 oikein 0,0113

177. 0,000374 (Valitaan alkeistapauksiksi 11 lottonumeron joukot. Lisänumeroista voivat olla oikein toinen tai molemmat. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on
$\binom{6}{5} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{40}{5} + \binom{6}{5} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{40}{4}$.)

178. a) $\frac{52 \cdot 3}{52 \cdot 51} = \frac{1}{17} \approx 0{,}059$

b) $\frac{13 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{17} \approx 0{,}059$

(Osoittaja on erilaisten parien lukumäärä: Ensin valitaan parin arvo ja sitten kaksi tämänarvoista korttia.)

179. a) 0,00050 (Alkeistapauksiksi voidaan valita viiden kortin jonot tai viiden kortin joukot.)
b) 0,78 (Lasketaan ensin vastatapahtuman todennäköisyys.)
c) 0,27 (Alkeistapauksiksi valitaan viiden kortin joukot.)

180. 0,050 (Alkeistapauksiksi valitaan viiden kortin joukot.)

181. a) 100 100 ($\binom{12}{3} \cdot \binom{15}{3}$) b) 0,34

182. $P(X = 3) = \frac{7}{102} \approx 0{,}069$

$P(X = 7) = \frac{35}{102} \approx 0{,}343$

$P(X = 11) = \frac{15}{34} \approx 0{,}441$

$P(X) = 15) = \frac{5}{34} \approx 0{,}147$

$E(X) \approx 9{,}67$ Sveitsin frangia

183. 0,15 (Suotuisten kuuden hengen joukkojen lukumäärä on $\binom{30}{3} \cdot \binom{20}{2} \cdot \binom{10}{1}$.)

184. a) 0,000262 (Alkeistapauksiksi valitaan 10 lottonumeron joukot. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{7}{6} \cdot \binom{29}{4}$.)

b) 0,000134 (Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on
$\binom{7}{6} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{29}{3} + \binom{7}{6} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{29}{2} +$
$\binom{7}{6} \cdot \binom{3}{3} \cdot \binom{29}{1}$.)

185. a) 0,548 euroa b) 0,549 euroa

186. $4{,}47 \cdot 10^{-28}$
(Valitaan alkeistapauksiksi 52 kortin jonot. Suotuisia alkeistapauksia on
$52 \cdot 12 \cdot 11 \cdot ... \cdot 1 \cdot 39 \cdot 12 \cdot ... = 4! \cdot (13!)^4$.)

187. a) 0,0000154 (Alkeistapauksiksi valitaan viiden kortin osajoukot. Erilaisia värisuoria on $4 \cdot 10$.)
b) 0,00197 (Erilaisten värikäsien määrästä $4 \cdot \binom{13}{5}$ vähennetään värisuorien määrä.)
c) 0,00392 (Erilaisten suorien lukumäärä voidaan laskea valitsemalla ensin pienimmän kortin numeroarvo ja sitten jokaisen kortin maa. Lukumäärästä $10 \cdot 4^5$ vähennetään värisuorien lukumäärä.)

188. a) 0,000240 (Valitaan kaikissa kohdissa a–e alkeistapauksiksi viiden kortin osajoukot. Neloskäsi muodostuu nelosista, 13 vaihtoehtoa, ja yhdestä eriarvoisesta kortista, 48 vaihtoehtoa.)
b) 0,00144 (Täyskäsi voidaan muodostaa valitsemalla ensin kolmoset, $13 \cdot \binom{4}{3}$ vaihtoehtoa, ja sitten pari, $12 \cdot \binom{4}{2}$ vaihtoehtoa.)
c) 0,0211 (Valitaan ensin kolmoset ja sitten kaksi niiden kanssa ja keskenään eriarvoista korttia, $\frac{48 \cdot 44}{2}$ vaihtoehtoa.)
d) 0,0475 (Valitaan ensin pari, $13 \cdot \binom{4}{2}$ vaihtoehtoa, ja sitten toinen pari ja huomataan, että samat parit saattavat tulla valituiksi eri järjestyksessä. Lopuksi valitaan molempien parien kanssa eriarvoinen kortti.)
e) 0,423 (Valitaan ensin pari ja sitten kolme korttia, jotka ovat eriarvoisia parin kanssa ja keskenään. Huomataan, että samat kolme korttia voivat tulla valituiksi eri järjestyksessä.)

189. a) $\binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{k-2}$

b) $\binom{n}{k-2} \cdot \binom{n-k+2}{2}$

c) $\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{2}$

d) Jokainen lauseke sievenee muotoon $\frac{n!}{2!(k-2)!(n-k)!}$.

Kertolaskusääntö

190. $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \approx 0{,}12$

Voidaan myös laskea tapahtuman klassinen todennäköisyys käyttämällä alkeistapauksina kolmen henkilön jonoja, jolloin todennäköisyys on $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{9 \cdot 8 \cdot 7}$, tai kolmen henkilön osajoukkoja, jolloin todennäköisyys on $\frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}}$.

191. a) $\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{1}{3}$ ja $\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = \frac{1}{18}$.
Tapahtumat A ja B eivät ole riippumattomat.
b) $\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{1}{6}$ ja $\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = \frac{1}{36}$.
Tapahtumat A ja B ovat riippumattomat.
c) $\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{1}{6}$ ja $\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = \frac{1}{36}$.
Tapahtumat A ja B eivät ole riippumattomat.

192. a) 0,12 b) 0,42
c) 0,28 d) 0,18

193. a) 0,58 b) 0,44

194. a) 0,37 b) 0,026

195. a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{13} = \frac{1}{1\,594\,323} \approx 6{,}3 \cdot 10^{-7}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{13} \approx 0{,}0051$

196. Kannattaa, sillä todennäköisyys on noin $0{,}52 > 0{,}5$. (Kysytty tapahtuma on tapahtuman ”ei yhtään kuutosta” vastatapahtuma.)

197. a) 0,5 b) 0,5

198. 0,44

199. 0,37

200. vähintään 8 henkilöä (Todennäköisyys, että n luovuttajasta ainakin yksi kuuluu veriryhmään A on $1 - 0{,}56^n$. Tulee olla $1 - 0{,}56^n > 0{,}99$ eli $0{,}56^n < 0{,}01$. Ensimmäinen n:n arvo, jolla epäyhtälö toteutuu, on 8.)

201. vähintään 1 200 kuljettajaa (Todennäköisyys, että n autoilijasta ainakin yksi on rattijuoppo, on $1 - 0{,}998^n$. Tulee olla $1 - 0{,}998^n > 0{,}90$ eli $0{,}998^n < 0{,}10$. Ensimmäinen n:n arvo, jolla epäyhtälö toteutuu, on 1 151. Lähtötietojen epätarkkuuden vuoksi tulos on pyöristetty.)

202. a) 0,06 (Todennäköisyys, että tuotteessa on ainakin yksi vioista, on $1 - 0{,}99 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}97$.)
b) 0,46

203. a) 0,10 ($0{,}7^3 \cdot 0{,}3$)
b) 0,125 (Yleisellä kertolaskusäännöllä laskettuna $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}$ tai klassinen todennäköisyys $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}$, missä alkeistapauksina ovat neljän arvan jonot.)

204. 1 100 (Todennäköisyys, että satunnaisesti valitun kotelon palloista ainakin yksi on virheellinen, on noin 0,114. Voidaan siis arvioida, että kun koteloita on paljon, niistä 11,4 % on sellaisia, joissa ainakin yksi on virheellinen.)

205. 40 % (Olkoon p todennäköisyys, että satunnaisesti valittu pallo on virheellinen. Ratkaistaan yhtälö $p^4 = 0{,}025$.)

206. a) 0,72 ($1 - 0{,}92^{14} \cdot 0{,}994^{15}$)
b) 0,059 ($(1 - 0{,}92^{14})(1 - 0{,}994^{15})$)

207. a) poika 1 ja tyttö 0
b) poika 0,5 ja tyttö 0,5
c) 0,25 (Todennäköisyys, että äiti on saanut omalta äidiltään punavihersokeusgeenin sisältävän X-kromosomin ja poika saa juuri tämän X-kromosomin.)
d) 0,02 (Todennäköisyys, että äiti on saanut omalta äidiltään punavihersokeusgeenin sisältävän X-kromosomin ja tyttö saa juuri tämän X-kromosomin ja että tytön isä on punavihersokea.)

208. $\frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = 0{,}071$
Voidaan myös laskea tapahtuman klassinen todennäköisyys käyttämällä alkeistapauksina neljän arvan jonoja, jolloin todennäköisyys on $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}$, tai neljän arvan osajoukkoja, jolloin todennäköisyys on $\frac{\binom{7}{4}}{\binom{12}{4}}$.

209. a) Terveydenhoitoon tyytyväinen on tyytyväinen joukkoliikenteeseen. Todennäköisyys on 0,69.
(Todennäköisyys voidaan laskea kertolaskusäännön avulla $\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \text{ ja } B)}{\mathrm{P}(A)}$ tai suoraan prosenttiosuuksista: Jos kuntalaisten lukumäärä on a, niin terveydenhoitoon tyytyväisiä on $0{,}52a$ ja molempiin tyytyväisiä $0{,}36a$, joten $\mathrm{P}(B|A) = \frac{0{,}36a}{0{,}52a} \approx 0{,}69$.)
b) Joukkoliikenteeseen tyytyväinen on tyytyväinen terveydenhoitoon. Todennäköisyys on 0,56.

210. a) 0,038 b) 0,64

211. a) $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{12} \approx 0{,}0000051$
b) $\frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{11}{12} \approx 0{,}62$

212. $\frac{1}{216} \approx 0{,}0046$

213. a) 0,87 b) 0,93

214. Ei kannata, sillä todennäköisyys on $0{,}49 < 0{,}5$.

215. $\left(\frac{19}{20}\right)^{20} \approx 0{,}36$

216. 0,074

217. 35 jäsentä

218. vähintään 150 heittoa (Todennäköisyys, että n kolmen nopan heittoa tuottaa ainakin yhden kuutoskolmosen, on $1 - \left(\frac{215}{216}\right)^n$. Tulee olla $1 - \left(\frac{215}{216}\right)^n > 0{,}5$ eli $\left(\frac{215}{216}\right)^n < 0{,}5$.)

219. 0,73

220. a) 0,92 % b) 0,66 % c) 40 %

221. 1,6 % (Yhtälöllä $p^8 = 0{,}88$ voidaan ratkaista todennäköisyys, että lasi on virheetön.)

222. 0,027 (Todennäköisyys saada yhdessä jaossa yksi ässä on $\frac{\binom{4}{1}\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}}$.)

223. a) 0,96 b) 0,46

224. a) 7 (Epäyhtälö $1 - 0{,}96^n \cdot 0{,}94^n > 0{,}5$ eli $0{,}9024^n < 0{,}5$.)

b) 25 (Epäyhtälö $(1 - 0{,}96^n) \cdot (1 - 0{,}94^n) > 0{,}5$.)

c) 290 (Epäyhtälö $1 - (1 - 0{,}04 \cdot 0{,}06)^n > 0{,}5$ eli $0{,}9976^n < 0{,}5$. Tulos on pyöristetty.)

Yhteenlaskusääntö

225. $\frac{4}{13} \approx 0{,}31$

226. 0,14 (P(molemmat patoja) + P(molemmat kuvakortteja) – P(molemmat patakuvia))

227. $\frac{11}{36} \approx 0{,}31$ (Voidaan laskea suotuisten alkeistapausten lukumäärä 36:sta mahdollisesta tai voidaan käyttää yleistä yhteenlaskusääntöä: P(1. heitolla 5) + P(2. heitolla 4) – P(1. heitolla 5 ja 2. heitolla 4). Voidaan myös laskea vastatapahtuman kautta: 1 – P(1. heitolla ei 5 ja 2. heitolla ei 4).)

228. a) Ovat. b) Eivät ole.
c) Ovat. d) Eivät ole.

229. a) 0,26 b) 0,98

230. a) 0,023 b) 0,75

231. 0,47

232. 0,13 (P(kaikki poikia) + P(kaikki tyttöjä))

233. $\frac{7}{15} \approx 0{,}47$ (P(molemmat punaisia) + P(molemmat mustia))

234. $\frac{23}{36} \approx 0{,}64$

235. 0,083 (Kokonaistodennäköisyys $0{,}75 \cdot 0{,}05 + 0{,}25 \cdot 0{,}18$.)

236. 0,40 $\left(5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4\right)$

237. a) 0,38 $(3 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2)$
b) 0,90

238. $P(X = 0) = 0{,}072$
$P(X = 1) = 0{,}324$
$P(X = 2) = 0{,}436$
$P(X = 3) = 0{,}168$
$E(X) = 1{,}7$
(Esimerkiksi $P(X = 2) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7$.)

239. $\frac{7}{8} = 0{,}875$
(P(1. heitolla tulee klaava) + P(1. heitolla ei tule ja 2. heitolla tulee) + P(1. ja 2. heitolla ei tule ja 3. heitolla tulee). Todennäköisyys voidaan laskea myös niin, että lasketaan vastatapahtuman ”kolmella heitolla ei tule klaavaa” todennäköisyys.)

240. 0,44 (Pitää tulla ”3 ja 5” tai ”4 ja 4” tai ”4 ja 5” tai ”5 ja 3” tai ”5 ja 4” tai ”5 ja 5”.)

241. a) 0,11 (Tulee pistesumma 6, mutta ei kolmosparia, tai tulee ensin ykköspari ja sen jälkeen pistesumma 4, mutta ei kakkosparia.)
b) 0,17 (Tulee pistesumma 7 tai ykköspari ja pistesumma 5 tai kakkospari ja pistesumma 3 tai ykköspari ja toinen ykköspari ja sitten pistesumma 3.)

242. $0{,}08 = 0{,}006 + 0{,}5p$, $p \approx 0{,}15$ (Tapahtuma ”mies on punavihersokea” toteutuu kahden poissulkevan vaihtoehdon kautta: Joko äiti on punavihersokea tai sitten äiti on punavihersokeuden kantaja ja mies saa äidiltä ao. geeniominaisuuden.)

243. $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$

244. 0,80 (Voidaan käyttää yleistä yhteenlaskusääntöä: P(tyytyväinen t.-hoitoon) + P(tyytyväinen j.-liikenteeseen) – P(tyytyväinen t.-hoitoon ja j.-liikenteeseen).
Voidaan myös käyttää lukumääriä: Jos kuntalaisten määrä on a, niin terveydenhoitoon tyytyväisten määrä on $0{,}52a$, joukkoliikenteeseen tyytyväisten $0{,}64a$ ja molempiin tyytyväisten $0{,}36a$. Siis ainakin toiseen tyytyväisiä on $0{,}52a + 0{,}64a - 0{,}36a$.)

245. 0,0764 (P(kaikki kuvakortteja) + P(kaikki samaa maata) – P(kaikki saman maan kuvakortteja), missä jokainen todennäköisyys voidaan laskea klassisena todennäköisyytenä käyttämällä alkeistapauksina kolmen kortin jonoja tai kolmen kortin osajoukkoja tai vaihtoehtoisesti yleisellä kertolaskusäännöllä.)

246. 0,33

247. 0,58

248. 12,08 euroa (Eri arvojen todennäköisyydet ovat pyöristämättöminä 0,8184, 0,1732 ja 0,0084.)

249. 0,16

250. 0,17 ($0{,}5 \cdot 0{,}5^3 + 0{,}5 \cdot 0{,}6^3$)

251. a) 0,18 b) 0,43

252. 0,85 (P(ei yhtään) + P(yhden), missä jälkimmäinen tapahtuma voi tapahtua seitsemällä eri tavalla.)

253. 0,59

254. a) 0,36 ($\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$)
b) 0,30

255. a) $\frac{1}{2}$ (Erilaisia heittosarjoja, joissa on ainakin kaksi peräkkäistä klaavaa, on 8 erilaista.)
b) $\frac{7}{8}$ (Lasketaan a-kohdan avulla yleisellä yhteenlaskusäännöllä tai vastatapahtuman kautta.)

256. a) 0,91 (Vastatapahtuma on ”joka heitolla tulee silmäluku 1...4”.)
b) 0,42 (Vastatapahtuma on ”ei tule yhtään silmälukua 5 tai ei yhtään silmälukua 6”. Vastatapahtuman todennäköisyys lasketaan yleisellä yhteenlaskusäännöllä.)

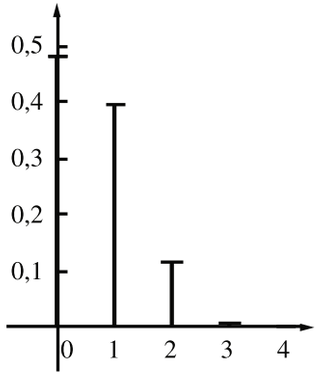
257. 0,58 (Vastatapahtuma on ”ei yhtään herttaa tai ei yhtään pataa”.)

258. $\frac{5}{54} \approx 0{,}0926$ (Kokonaistodennäköisyys P(1. silmäluku = 1) · P(3. silmäluku > 2. silmäluku > 1) + ... $= \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{36}$ + ...)

Toistokoe

259. 0,19

260. P(0 kuutosta) ≈ 0,48, P(1 kuutonen) ≈ 0,39, P(2 kuutosta) ≈ 0,12, P(3 kuutosta) ≈ 0,015, P(4 kuutosta) ≈ 0,00077



261. 0,33

262. 0,45 (Kyseessä ei ole toistokoe. Todennäköisyys lasketaan valitsemalla alkeistapauksiksi kuuden arvan joukot.)

263. a) 0,37 b) 0,27

264. 0,87

265. 7,5 %

266. 0,84

267. 0,38 (Lasketaan ensin vastatapahtuman ”enintään yksi punavihersokea” todennäköisyys.)

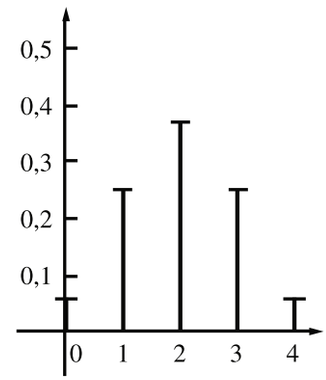
268. Kannattaa, sillä voiton odotusarvo yhdellä kierroksella on 0,25 euroa.

269. 0,62 (Kannattaa ensin laskea vastatapahtuman ”12 heitolla tulee korkeintaan yksi kuutonen” todennäköisyys.)

270. 0,36 tai 0,64
(Toisen asteen yhtälö $2p(1 - p) = 0{,}46$.)

271. 0,245

272. P(0 kruunaa) = 0,0625, P(1 kruuna) = 0,25, P(2 kruunaa) = 0,375, P(3 kruunaa) = 0,25, P(4 kruunaa) = 0,0625



273. 0,31

274. 0,35 (Kyseessä ei ole toistokoe. Todennäköisyys lasketaan valitsemalla alkeistapauksiksi kahdeksan hengen joukot.)

275. 0,055

276. 0,60

277. a) 0,103 b) 0,301

278. suuremmaksi kuin 32 euroa
(Jos x on sovittu rahamäärä, niin Anjan yhden kierroksen voiton odotusarvo on $0{,}0625 \cdot x + 0{,}25 \cdot (-1) + 0{,}375 \cdot (-2) + 0{,}25 \cdot (-3) + 0{,}0625 \cdot (-4)$ euroa.)

279. a) 0,997 b) 0,983

280. 0,91

281. 0,28 tai 0,72 (Olkoon p todennäköisyys, että A tapahtuu yksittäisessä toistossa. Tällöin $6p^2(1 - p)^2 = 0{,}24$. Yhtälö voidaan saattaa muotoon $(p(1 - p))^2 = 0{,}04$.)

282. a) 0,074 (Olkoon p A:n todennäköisyys yksittäisessä toistossa. Todennäköisyys, että A tapahtuu kolmessa toistossa yhden kerran, on $3p(1-p)^2$, ja todennäköisyys, että A tapahtuu kuudessa toistossa kaksi kertaa, on $15p^2(1-p)^4 = 15(p(1-p)^2)^2$.)

b) 0,012

283. 0,61 (BIFK voittaa neljä ensimmäistä ottelua tai BIFK voittaa neljästä ensimmäisestä ottelusta kolme ja viidennen ottelun tai ... .)

284. 0,34

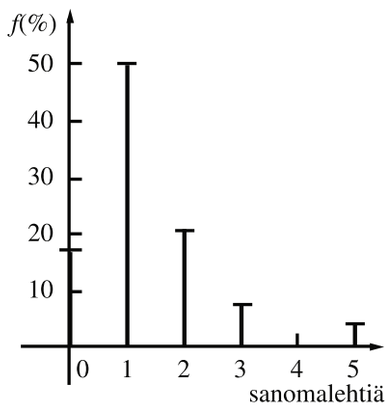
Diskreetti tilastollinen jakauma

285. a)

lehtiä	frekvenssi (%)
0	17
1	50
2	21
3	8
4	0
5	4

b) tyyppiarvo 1 lehti, keskiarvo 1,4 lehteä

c)



286. a) 8 b) 7,3
(Keskiarvo voidaan laskea laskimen tilastotoiminnoilla käyttämällä prosenttilukuja frekvensseinä.)

287. 7,69

288. 6 274 euroa

289. keskiarvo 8,2, keskihajonta 1,1

290. keskiarvo 3,3, keskihajonta 1,8

291. odotusarvo 1,2, keskihajonta 0,92
(P($X = 0$) = 0,2401, P($X = 1$) = 0,4116, P($X = 2$) = 0,2646, P($X = 3$) = 0,0756, P($X = 4$) = 0,0081)

292. odotusarvo 1,2, keskihajonta 0,75
$(\mathrm{P}(X=0) = \frac{1}{6}, \ \mathrm{P}(X=1) = \frac{1}{2},$
$\mathrm{P}(X=2) = \frac{3}{10}, \ \mathrm{P}(X=3) = \frac{1}{30})$

293. a) tyyppiarvo 1, keskiarvo 1,7
b) tyyppiarvo englanti, keskiarvoa ei voi määrittää

294. a) 40 %
b) 96 % (Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on yhdenmuotoisuussuhteen neliö.)

295. 4 904 euroa

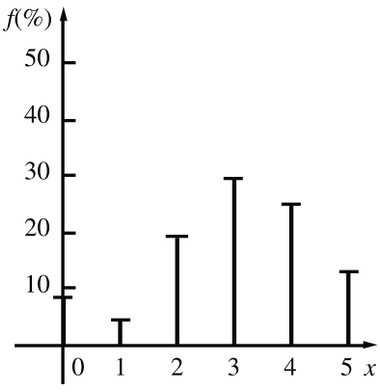
296. 59,3 %

297. a)

muuttuja x	frekvenssi %
5	13,0
4	25,0
3	29,3
2	19,6
1	4,3
0	8,7

b) tyyppiarvo 3 ja keskiarvo 3,0, keskihajonta 1,4

c)



298. Laite A: keskiarvo 2,65 cm,
keskihajonta 0,07 cm
Laite B: keskiarvo 2,70 cm,
keskihajonta 0,17 cm
Laite A on tarkempi, mutta sen asteikko vaatinee korjausta.
Laitteen B mittaustarkkuus on huono, vaikka asteikko onkin ehkä kohdallaan. Korjattavaa on etsittävä jostain muualta.

299. painotettu keskiarvo 7,79, tavallinen keskiarvo 8,50

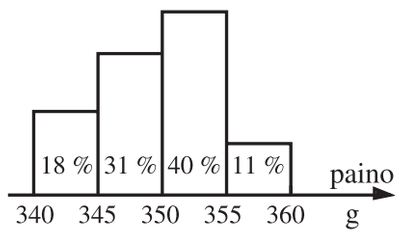
300. odotusarvo 68 euroa, keskihajonta 31 euroa

301. a) odotusarvo 8 euroa,
keskihajonta 24 euroa
b) odotusarvo 8 euroa,
keskihajonta 17,50 euroa

Jatkuva tilastollinen jakauma

302. a) luokassa 350–354 grammaa
b) 349 grammaa
(Luokkakeskukset ovat
(339,5 + 344,5) : 2 = 342, 347, 352 ja 357.)
c)

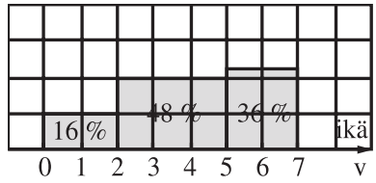
pakkauksen massa (g)	frekvenssi (%)
340–344	18
345–349	31
350–354	40
355–359	11



303. a) todelliset rajat 0, 2, 5 ja 7
luokkakeskukset 1, 3,5 ja 6
b) 4,0 vuotta

304.

ikä (vuotta)	frekvenssi (%)
0–1	16
2–4	48
5–6	36



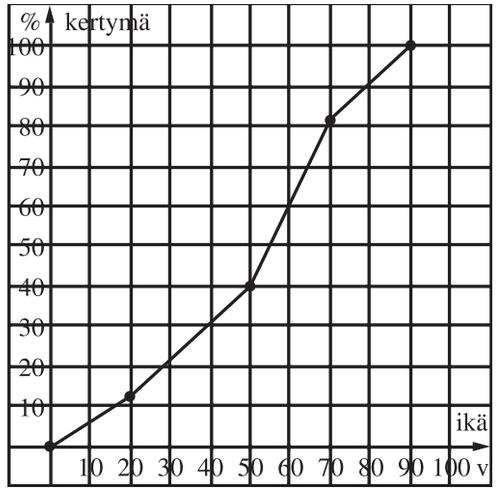
(Pylväiden korkeudet ovat 8, 16 ja 18 yksikköä. Kuviossa yksi ruutu on 8 korkeuden yksikköä.)

305. a)

etäisyys (m)	f (%)
0– 200	22 %
200– 500	50 %
500–1000	28 %

b) 0,39 c) 0,22 d) 0,39

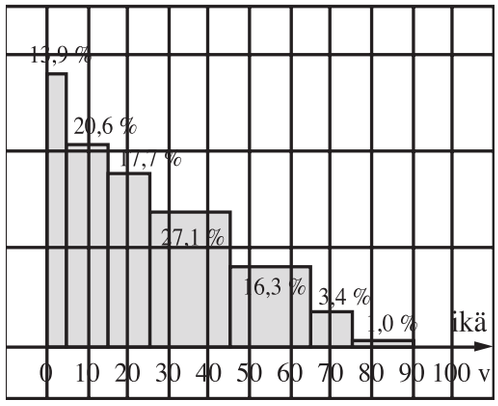
306.



a) 55 vuotta
b) nuorin neljännes enintään 33-vuotiaista ja vanhin neljännes vähintään 67-vuotiaista
(Kuvaaja piirretään pisteiden (0, 0), (20, 12), (50, 40), (70, 81) ja (90, 100) kautta.)

307. 27,6 vuotta (Luokkakeskukset ovat 2,5, 10 jne. Jos keskiarvo lasketaan laskimen tilastotoiminnolla, niin kaikki laskimet eivät hyväksy desimaalilukuina annettuja frekvenssejä. Ongelma kierretään kertomalla suhteelliset frekvenssit kymmenellä eli muuttamalla prosentit promilleiksi.)

308.

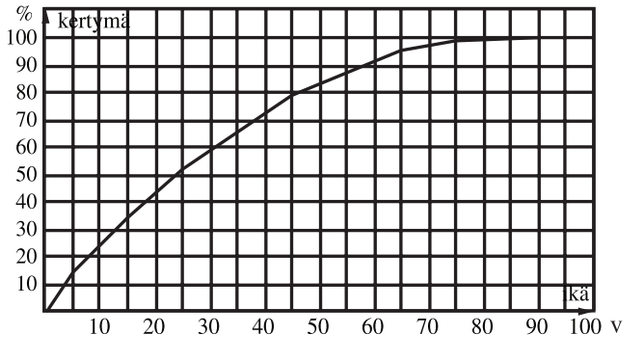


(Pylväiden pinta-aloina on käytetty suhteellisten frekvenssien prosenttilukuja.)

luokka	todellinen väli	pylvään leveys	pylvään korkeus
0– 4	0– 5	5	13,9 : 5 = 2,78
5–14	5–15	10	20,6 : 10 = 2,06
15–24	15–25	10	17,7 : 10 = 1,77
25–44	25– 45	20	27,1 : 20 ≈ 1,36
45–64	45–65	20	16,3 : 20 ≈ 0,82
65–74	65–75	10	3,4 : 10 = 0,34
75–89	75–90	15	1,0 : 15 ≈ 0,07

(Kuviossa korkeuden yksikkönä on kaksi ruutuväliä.)

309.



a) 24 vuotta
b) 10-vuotiaita tai nuorempia, vähintään 42-vuotiaita

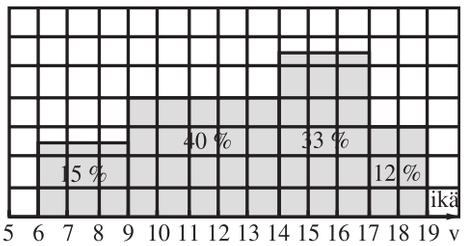
310. noin 6 200 euroa

311. a)

odotusaika (min)	frekvenssi
0	11
1	10
2	9
3	8
4	12

b) 3,5 minuuttia
c) keskiarvo 2,5 minuuttia ja keskihajonta 1,5 minuuttia ($\sqrt{2{,}2}$)

312. a) 13 vuotta
b)



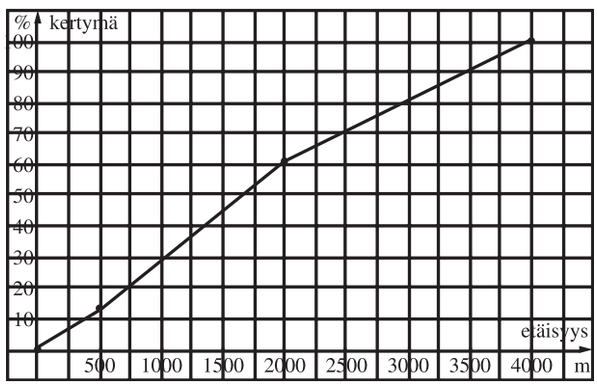
(Pylväiden korkeudet ovat 5, 8, 11 ja 6 yksikköä. Kuviossa ruutuväli vastaa kahta korkeuden yksikköä.)

313. a) 0,29 b) 0,55 c) 0,16

314. a)

etäisyys (m)	frekvenssi %
0– 500	13
500–2 000	48
2 000–4 000	39

b)

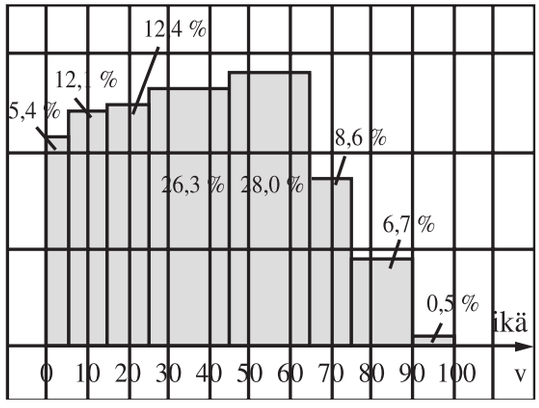


Mediaani on noin 1 700 metriä.

315. a) A ja III, B ja I, C ja II
b) A: 5 B: 5 C: 2
c) A: 0,7 B: 0,6 C: 0,9

316. 40,4 vuotta (Jos keskiarvo lasketaan laskimen tilastotoiminnolla, niin kaikki laskimet eivät hyväksy desimaalilukuina annettuja frekvenssejä. Ongelma kierretään kertomalla suhteelliset frekvenssit kymmenellä eli muuttamalla prosentit promilleiksi.)

317.

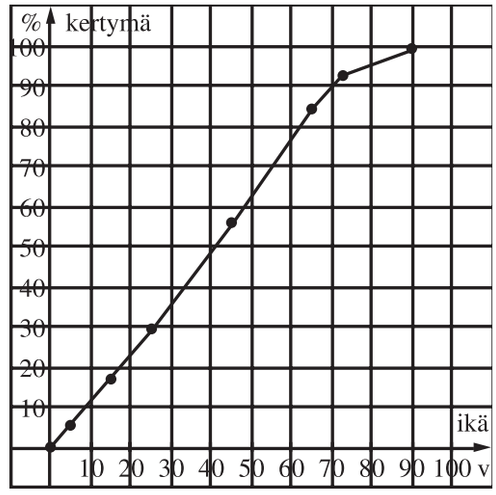


(Pylväiden pinta-aloina on käytetty suhteellisten frekvenssien prosenttilukuja.)

luokka	leveys	pylvään korkeus
0 – 4	5	1,08
5 – 14	10	1,21
15 – 24	10	1,24
25 – 44	20	1,32
45 – 64	20	1,40
65 – 74	10	0,86
75 – 89	15	0,45
90 – 100	10	0,05

(Kuviossa vaakaviivojen väli vastaa 0,5:ttä.)

318. a) 40 vuotta
b) 21-vuotiaita tai nuorempia, vähintään 58-vuotiaita



(Viimeisen luokan kohdalle kertymäkuvaajaa ei voi piirtää.)

319. a) $v = y_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(u - x_1)$

b) 40 %

c) $u = x_1 + \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(v - y_1)$

d) 21

320. a) Egypti 47 %, Ruotsi 24 %
(Egypti $37{,}7 + \dfrac{27{,}6}{15} \cdot 5$)

b) Egypti 22 vuotta, Ruotsi 40 vuotta
(Egypti $15 + \dfrac{15}{27{,}6} \cdot 12{,}3$)

c) Egypti vähintään 42 vuotta, Ruotsi vähintään 63 vuotta

Normaalijakauma

321. a) -1 ja 2 b) 84 % ja 98 %

322. a) 0,9115
b) 0,1038 $(1 - \Phi(1{,}26))$
c) 0,7910 $(\Phi(0{,}81))$
d) 0,4316 $(\Phi(0{,}45) - (1 - \Phi(0{,}70)))$

323. a) 0,64 $(P(Z \leqslant 0{,}37))$
b) 0,28 $(P(Z \leqslant -0{,}58) = 1 - \Phi(0{,}58))$
c) 0,66 $(P(Z \leqslant 0{,}58) - P(Z \leqslant -1{,}58)$
$= \Phi(0{,}58) - (1 - \Phi(1{,}58)))$

324. a) 87 % $(\Phi(1{,}14))$
b) 72 % $(1 - \Phi(-0{,}57) = \Phi(0{,}57))$
c) 59 % $(\Phi(1{,}14) - \Phi(-0{,}57)$
$= \Phi(1{,}14) - (1 - \Phi(0{,}57)))$
d) 15 % $(1 - \Phi(1{,}43) + \Phi(-1{,}43)$
$= 2(1 - \Phi(1{,}43)))$

325. 850

326. a) 1,28 b) $-0{,}67$
c) 1,48 (Etsitään taulukosta sellainen muuttujan z arvo, että $\Phi(z) = 0{,}93$.)

327. a) 11,8 ($\frac{x - 10{,}0}{4{,}0} \approx 0{,}44$, missä 0,44 on sellainen arvo z, että $\Phi(z)$ on lähinnä arvoa 0,67.)

b) 4,9 ($\frac{x - 10{,}0}{4{,}0} \approx -1{,}28$, missä $-1{,}28$ on sellainen arvo z, että $\Phi(-z)$ on lähinnä arvoa 0,90.)

328. a) 94 pistettä b) 72 pistettä

329. a) 114,5 cm–130,9 cm (Rajat ovat $122{,}7 - 1{,}64 \cdot 5{,}0$ ja $122{,}7 + 1{,}64 \cdot 5{,}0$.)
b) 112,9 cm–132,5 cm

330. 1 010 g
(Olkoon satunnaismuuttuja X pussin paino. On määritettävä odotusarvo μ niin, että $P(X \geqslant 1000) = 0{,}90$ eli
$P(Z \geqslant \frac{1000 - \mu}{7{,}8}) = 0{,}90$.)

331. 0,67 (Lasketaan ensin vastatapahtuman ”kaikki pojat enintään 180 cm” todennäköisyys.)

332. keskiarvo 1 362 h, keskihajonta 200 h
(Olkoon satunnaismuuttuja X lampun käyttöikä. Keskihajonta σ määritetään ehdosta $P(X \leqslant 1630) = 0{,}91$ eli
$P(Z \leqslant \frac{1630 - 1362}{\sigma}) = 0{,}91$.)

333. a) odotusarvo 200,
keskihajonta $\sqrt{\frac{500}{3}} \approx 12{,}91 \approx 12{,}9$
b) 0,89 (Määritetään $P(179{,}5 \leqslant X \leqslant 220{,}5)$, missä satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa odotusarvona 200 ja keskihajontana 12,91.)
c) 0,03 (Määritetään $P(199{,}5 \leqslant X \leqslant 200{,}5)$ normaalijakautuneelle satunnaismuuttujalle X.)

334. a) odotusarvo 381,9, keskihajonta 4,37
(Keskihajonta on $\sqrt{402 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}$.)
b) 0,98 (Määritetään $P(X \leqslant 390{,}5)$, missä satunnaismuuttuja X noudattaa normitettua normaalijakaumaa odotusarvona 381,9 ja keskihajontana 4,37.)

335. a) kohonnut sairastumisriski 5,4 mmol/l–6,0 mmol/l ja korkea sairastumisriski yli 6,0 mmol/l
b) kohonnut sairastumisriski 14 % ja korkea sairastumisriski 2 %

336. a) 0,67 b) 0,48

337. a) 20 % b) 5,4 % c) 90 %

338. 81 %

339. 0,24

340. 0,69 (Jokaisen silmukan tulee kestää 2 000 kg:n taakka.)

341. a) 16,2 b) 9,9

342. 28,2 mg

343. 80 pistettä tai vähemmän ja 120 pistettä tai enemmän

344. a) 7,6 b) 2,5

345. 0,015 (Keskihajonta σ toteuttaa yhtälön $\frac{5}{\sigma} = 1{,}08$, missä 1,08 on sellainen muuttujan z arvo, että $\Phi(z) = 0{,}86$.)

346. 55 km/h (Yhtälöpari $\mu - 0{,}5\sigma = 50$ ja $\mu + 1{,}48\sigma = 70$.)

347. a) 0,15 (Yhteisajan odotusarvo on 53 minuuttia ja keskihajonta 6,7 minuuttia.)
b) 0,07

348. a) odotusarvo 30, keskihajonta $\sqrt{15} \approx 3{,}87$
b) 0,30, todellinen todennäköisyys 0,30
c) 0,10, todellinen 0,10

349. 0,15 (Satunnaismuuttuja ”kannattajien määrä 600 satunnaisesti valitun joukossa” noudattaa binomijakaumaa odotusarvona 288 ja keskihajontana 12,2. Lasketaan $P(X \geqslant 300{,}5)$ normaalijakaumaa noudattavalle satunnaismuuttujalle X, jolla on sama odotusarvo ja sama keskihajonta.)

350. a) noin 27 %:lla (Olkoon X satunnaisesti valitun ryhmän henkilön lepopulssi. Tällöin $P(X > 80) = P(\frac{60}{X} < 0{,}75)$, missä muuttuja $\frac{60}{X}$ noudattaa normaalijakaumaa.)
b) 58–97 lyöntiä sekunnissa

Kertaustehtäviä

351. a) $\frac{1}{8} = 0{,}125$ (Alkeistapaukset (1, 1), (1, 2) jne., missä ensimmäinen koordinaatti on nelitahokkaan silmäluku ja jälkimmäinen kahdeksantahokkaan silmäluku, voidaan merkitä koordinaatistoon. Alkeistapauksia on 32. Suotuiset alkeistapaukset ovat (1, 5), (2, 4), (3, 3) ja (4, 2).)
b) $\frac{3}{16} \approx 0{,}19$

352. a) 0,66 (Merkitään hiirien lukumäärää a. Kahden vuoden kuluttua elossa oli $0{,}66a$ hiirtä. Todennäköisyys on $\frac{0{,}66a}{a}$.)
b) 0,35
c) 0,43 ($\frac{0{,}31a}{0{,}72a}$)
d) 0

353. $\frac{1}{3}$ (Arvonta vastaa pisteen arpomista epäyhtälöiden $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ja $-2 \leqslant y \leqslant 1$ määräämästä suorakulmiosta, jonka pinta-ala on 6. Epäyhtälö $x + y > 0$ toteutuu suoran $x + y = 0$ yläpuolelle jäävässä kolmiossa, jonka pinta-ala on 2.)

354. 0,52 (Tarkastellaan kohtaa, johon kolikon keskipiste putoaa neliössä, jonka sivu on 106 mm (laatta ja puolet ympäröivästä saumasta). Kolikko on kokonaan yhdellä laatalla, jos sen keskipiste putoaa laatan sisälle neliöön, jonka sivun pituus on 76,2 mm. Todennäköisyys on $\frac{76{,}2^2}{106^2}$.)

355. 0,23 (Suotuisat lähtösuunnat ovat sektorissa, jonka keskuskulman puolikas toteuttaa yhtälön $\cos\alpha = \frac{15}{20}$. Todennäköisyys on $\frac{2\alpha}{360°} \approx \frac{82{,}8°}{360°}$.)

356. a)

voitto	todennäköisyys
23	$\frac{1}{15}$
8	$\frac{2}{15}$
-2	$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

b) 1 euro

$(\mathrm{E}(X) = \frac{1}{15} \cdot 23 + \frac{2}{15} \cdot 8 + \frac{12}{15} \cdot (-2))$

c) 6,8 euroa (Keskihajonnan neliö on $\frac{1}{15}(23 - 1)^2 + \frac{2}{15}(8 - 1)^2 + \frac{4}{5}(-2 - 1)^2$.)

357. 2,04

$(\frac{1}{81} \cdot 5 + \frac{8}{81} \cdot 4 + \frac{16}{81} \cdot 3 + \frac{24}{81} \cdot 2 + \frac{32}{81} \cdot 1)$

358. 0,15 (Erilaisia ruokalajiviisikkoja on $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$, joista suotuisia on $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.)

359. Ei kannata, sillä todennäköisyys on $0{,}48 < 0{,}5$.
(Valitaan alkeistapauksiksi mahdolliset heittosarjat, joiden lukumäärä on 6^5. Suotuisissa sarjoissa ensimmäinen heittotulos voi olla mikä tahansa ja sen jälkeen jokainen tulos on eri kuin edellinen. Suotuisia heittosarjoja on $6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.)

360. a) 5 korttia
b) P(2 korttia) $\approx 0{,}235$, P(3 korttia) $\approx 0{,}367$, P(4 korttia) $\approx 0{,}292$, P(5 korttia) $\approx 0{,}105$
(Todennäköisyydet lasketaan käyttämällä alkeistapauksina jonoja. Esimerkiksi
P(3 korttia) $= \frac{52 \cdot 39 \cdot 24}{52 \cdot 51 \cdot 50}$.)
c) 3,3

361. 0,17 (Alkeistapauksiksi voidaan valita seitsemän numeron lottorivit, joiden lukumäärä on $\binom{39}{7}$. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{31}{7}$. Alkeistapauksiksi voidaan valita myös seitsemän lottonumeron jonot, jolloin todennäköisyys on $\frac{31 \cdot 30 \cdot \ldots \cdot 25}{39 \cdot 38 \cdot \ldots \cdot 33}$.
Todennäköisyys voidaan laskea myös yleisellä kertolaskusäännöllä käyttämällä ehdollisia todennäköisyyksiä, jolloin saadaan
$\frac{31}{39} \cdot \frac{30}{38} \cdot \ldots \cdot \frac{25}{33}$.)

362. $\frac{1}{4} = 0{,}25$ (Valitaan alkeistapauksiksi kahden paikan joukot. Suotuisia alkeistapauksia on 7, ja todennäköisyys on $\frac{7}{\binom{8}{2}}$.)

363. a) 0,36 b) 0,54
(Jos alkeistapauksiksi valitaan kahden pennun joukot, joiden lukumäärä on $\binom{8}{2}$, niin suotuisten alkeistapausten lukumäärä on a-kohdassa $\binom{5}{2}$ ja b-kohdassa $5 \cdot 3$. Todennäköisyydet voidaan laskea myös käyttäen ehdollisia todennäköisyyksiä ja todennäköisyyden laskusääntöjä, jolloin a-kohdan todennäköisyys on $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7}$ ja b-kohdan todennäköisyys on
P(ensin tyttö ja sitten poika) + P(ensin poika ja sitten tyttö) $= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}$.)

364. 0,37 (Valitaan alkeistapauksiksi viiden pallon joukot. Todennäköisyys on $\frac{\binom{15}{3}\binom{12}{2}}{\binom{27}{5}}$.)

365. 0,00105 (Valitaan alkeistapauksiksi lottorivit. Suotuisissa alkeistapauksissa on 4 oikean lottorivin 6:sta numerosta ja 2 numeroa muista 42 numerosta. Todennäköisyys on

$$\frac{\binom{6}{4}\binom{42}{2}}{\binom{48}{6}}.)$$

366. a) $\frac{1}{5} = 0{,}2$ (Voidaan laskea klassinen todennäköisyys käyttämällä alkeistapauksina kolmen sukan joukkoja, jolloin todennäköisyys on

$$\frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}},$$ tai kolmen sukan jonoja, jolloin todennäköisyys on $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4}$.

Voidaan myös käyttää yleistä kertolaskusääntöä ja ehdollisia todennäköisyyksiä, jolloin todennäköisyys on

$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$.)

b) $\frac{4}{5} = 0{,}8$ (a-kohdan tapahtuman vastatapahtuma)

367. 0,60 (Lasketaan ensin vastatapahtuman ”kaikilla eri kortti” todennäköisyys. Erilaisia 52 kortin kymmenikköjä on 52^{10}, joista vastatapahtumalle suotuisia on

$52 \cdot 51 \cdot ... \cdot 43 = \frac{52!}{42!}$.)

368. 0,77 (P(jää kiinni) = 1 – P(ei jää kiinni)

$= 1 - \left(\frac{299}{300}\right)^{440}$.)

369. 13 jäsentä (Jos ryhmässä on n suomalaista, niin todennäköisyys, että ainakin yksi kuuluu B-veriryhmään, on

1 – P(kukaan ei kuulu) = $1 - 0{,}83^n$. Tulee olla $1 - 0{,}83^n > 0{,}9$ eli $0{,}83^n < 0{,}1$. Lasketaan potenssin arvoja, kunnes arvo 0,1 alittuu.)

370. 0,98 (Todennäköisyys, että kolmen komponentin laite toimii, on $1 - 0{,}2^3$. Todennäköisyys, että kahden komponentin laite toimii, on $1 - 0{,}1^2$. Todennäköisyys, että koko laite toimii, on $(1 - 0{,}2^3) \cdot (1 - 0{,}1^2)$.)

371. a) 0,83 (P(ainakin yksi tavataan)
= 1 – P(yhtään ei tavata)
$= 1 - 0{,}85^{10} \cdot 0{,}999^{120}$.)
b) 0,091
(P(ainakin yksi kanahaukka) · P(ainakin yksi pajulintu) = $(1 - 0{,}85^{10}) \cdot (1 - 0{,}999^{120})$.)

372. 0,31 (P(molemmat kuvia) + P(molemmat samaa maata) – P(molemmat saman maan kuvia)

$= \frac{16 \cdot 15}{52 \cdot 51} + \frac{52 \cdot 12}{52 \cdot 51} - \frac{16 \cdot 3}{52 \cdot 51}$.)

373. a) 0,34 ($0{,}7 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}4$)
b) 0,92
(1 – P(ei yhtään kertaa) = $1 - 0{,}3 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}6$)

374. 0,33 (P(samassa ryhmässä)
= P(molemmat A-ryhmässä) + ...)

375. 0,56
(P(samanväriset) = P(molemmat punaiset) + P(molemmat vihreät), missä yhteenlaskettavat todennäköisyydet voidaan laskea klassisina todennäköisyyksinä käyttämällä alkeistapauksina joko kahden sukan joukkoja tai jonoja tai yleisellä kertolaskusäännöllä. Menetelmästä riippuen P(molemmat punaisia) on

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{14}{2}} \text{ tai } \frac{4 \cdot 3}{14 \cdot 13} \text{ tai } \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13}.)$$

376. 0,76 (P(huomenna poutapäivä ja ylihuomenna poutapäivä) + P(huomenna sadepäivä ja ylihuomenna poutapäivä) = $0{,}8 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}6$.)

377. a) 0,00144 $\left(\binom{13}{10} \cdot \binom{1}{3}^{10} \cdot \binom{2}{3}^{3}\right)$

b) 0,00165

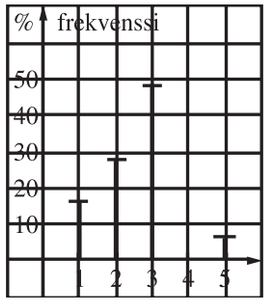
378. 0,67 (P(vähintään kaksi) = 1 – (P(ei yhtään) + P(yksi)).)

379. 0,25 $\left(\binom{10}{5} 0{,}51^5 \cdot 0{,}49^5\right)$

380. 0,78 (Olkoon satunnaismuuttuja X poikien lukumäärä. Todennäköisyys on $P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$.)

381. a) keskiarvo 2,5, keskihajonta 0,97
(Keskiarvo on
$\overline{x} = 0{,}17 \cdot 1 + 0{,}28 \cdot 2 + 0{,}49 \cdot 3 + 0{,}06 \cdot 5$.
Keskihajonnan neliö on
$s^2 = 0{,}17 \cdot (1 - 2{,}5)^2 + 0{,}28 \cdot (2 - 2{,}5)^2$
$+ 0{,}49 \cdot (3 - 2{,}5)^2 + 0{,}06 \cdot (5 - 2{,}5)^2$.
Voidaan myös laskea laskimen tilastotoiminnoilla käyttämällä prosenttilukuja frekvensseinä.)

b)



(Sopiva havainnollistus on janadiagrammi. Voidaan myös piirtää pylväsdiagrammi, jonka muodostuu tasaleveistä erillisistä pylväistä.)

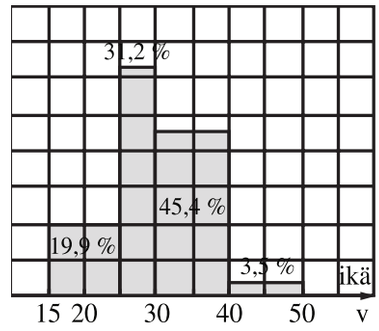
382. Nousi 0,6:lla. (Jos a on pistemäärien summa ensimmäisessä kokeessa, niin toisen kokeen pistemäärien summa on $a + 12$.

Ensimmäisen kokeen keskiarvo on $\frac{a}{20}$ ja

toisen kokeen $\frac{a+12}{20} = \frac{a}{20} + \frac{12}{20}$.)

383. a) 30,0 vuotta (0,199 · 20 + 0,312 · 27,5 + 0,454 · 35 + 0,035 · 45)

b)



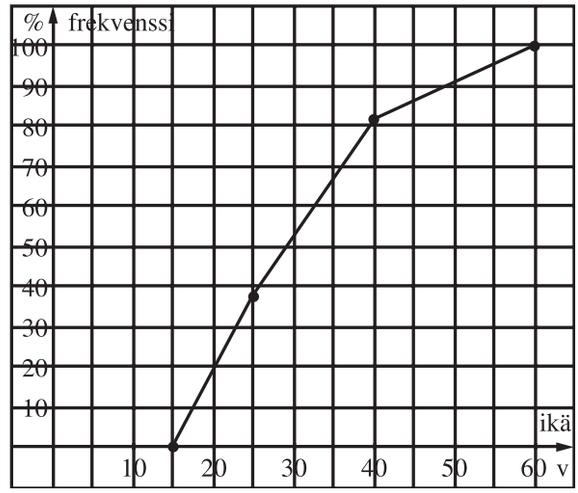
(Pylväiden pinta-aloina on käytetty suhteellisten frekvenssien prosenttilukuja. Pylväiden korkeudet ovat $\frac{19{,}9}{10} = 1{,}99$, $\frac{31{,}2}{5} = 6{,}24$, $\frac{45{,}4}{10} = 4{,}54$ ja $\frac{3{,}5}{10} = 0{,}035$.)

384. a) Todennäköisyydet ovat 0,52 ja 0,33.
(Pinta-alojen 11 ja 7 suhde kokonaispinta-alaan 21.)

b)

ikä	frekvenssi %
15–24	38
25–39	43
40–59	19

c)



Mediaani-ikä on noin 30 vuotta.
(Kertymäkuvaaja yhdistää pisteet (15, 0), (25, 38), (40, 81) ja (60, 100).)

385. a) 0,68 $\left(\Phi\left(\frac{9{,}3 - 7{,}2}{4{,}6}\right) \approx \Phi(0{,}46)\right)$

b) 0,94 $(1 - \Phi(-1{,}57) = \Phi(1{,}57))$

c) 0,67 $(\Phi(0{,}61) - \Phi(-1{,}57)$
$= \Phi(0{,}61) - (1 - \Phi(1{,}57))$

386. a) 12,2 (Tulee olla $P\left(Z \leqslant \frac{x - 7{,}2}{4{,}6}\right) = 0{,}86$ eli $\Phi\left(\frac{x - 7{,}2}{4{,}6}\right) = 0{,}86$. Taulukon mukaan $\frac{x - 7{,}2}{4{,}6} \approx 1{,}08$, joten $x \approx 7{,}2 + 1{,}08 \cdot 4{,}6$.)

b) 1,5 $(x \approx 7{,}2 - 1{,}23 \cdot 4{,}6)$

387. a) 60 %:lla (Olkoon satunnaismuuttuja X satunnaisesti valitun pojan pituus. Tällöin

$$P(X \leqslant 175{,}0) = P\left(Z \leqslant \frac{175{,}0 - 173{,}1}{7{,}2}\right)$$

$\approx \Phi(0{,}26)$.)

b) 17 %:lla

$(P(X \geqslant 180{,}0) = 1 - P(X \leqslant 180{,}0)$

$$= 1 - P\left(Z \leqslant \frac{180{,}0 - 173{,}1}{7{,}2}\right) = 1 - \Phi(0{,}96))$$

388. 39 % (Olkoon satunnaismuuttuja X satunnaisesti valitun munan paino. Tällöin

$P(63 \leqslant X \leqslant 73) = P(X \leqslant 73) - P(X \leqslant 63)$

$$= P\left(Z \leqslant \frac{73 - 68{,}1}{9{,}8}\right) - P\left(Z \leqslant \frac{63 - 68{,}1}{9{,}8}\right)$$

$\approx P(Z \leqslant 0{,}5) - P(Z \leqslant -0{,}52)$
$= \Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}52)$
$= \Phi(0{,}5) - (1 - \Phi(0{,}52)) \approx 0{,}39$.)

389. 30 minuuttia (Olkoon satunnaismuuttuja X koulumatkan kesto. On määritettävä x niin, että $P(X \geqslant x) = 0{,}05$ eli $P(X \leqslant x) = 0{,}95$. Siis tulee olla

$$P\left(Z \leqslant \frac{x - 22}{5}\right) = \Phi\left(\frac{x - 22}{5}\right) = 0{,}95.$$

Taulukon mukaan $\frac{x - 22}{5} \approx 1{,}64$.)

390. 10,189 kg (Olkoon säädetty paino μ (kg) ja olkoon satunnaismuuttuja X pussin paino. Todennäköisyyden

$$P(X \geqslant 10) = P\left(Z \geqslant \frac{10 - \mu}{0{,}115}\right)$$ tulee olla 0,95.

Määritetään taulukosta sellainen z:n arvo, että $P(Z \geqslant z) = 0{,}95$ eli $\Phi(-z) = 0{,}95$. Lähinnä on arvo $z = -1{,}64$. Siis

$\frac{10 - \mu}{0{,}115} = -1{,}64$, joten $\mu = 10 + 1{,}64 \cdot 0{,}115$.)

391. enintään 0,0086 mm (Olkoon keskihajonta σ (mm) ja olkoon satunnaismuuttuja X linssin paksuus. Todennäköisyys, että linssin paksuus ylittää hylkäämisrajan, on

$P(X \geqslant 3{,}020) = 1 - P(X \leqslant 3{,}020)$

$$= 1 - P\left(Z \leqslant \frac{0{,}020}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0{,}020}{\sigma}\right).$$

Tulee olla $1 - \Phi\left(\frac{0{,}020}{\sigma}\right) \leqslant 0{,}01$ eli

$\Phi\left(\frac{0{,}020}{\sigma}\right) \geqslant 0{,}99$. Taulukosta nähdään, että tulee olla $\frac{0{,}020}{\sigma} \geqslant 2{,}33$.)

Sarja A

1. 0,35 (Ensimmäisen ystävyksen vaunulle on 7 vaihtoehtoa, samoin toisen jne. Tuloperiaatteen nojalla erilaisia sijoitteluja on 7^4. Tapahtumalle ”kaikki eri vaunuissa” suotuisia sijoitteluja on $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$, joten

$$\text{P(kaikki eri vaunuissa)} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7^4}.)$$

2. Kannattaa. (Todennäköisyys, että yhdellä heitolla saadaan pari, on $\frac{1}{6}$.

P(neljällä heitolla ainakin yksi pari)
$= 1 - \text{P(ei yhtään paria)}$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}52 > 0{,}50.)$$

3. 0,0050 (39 lottonumerosta 20 on parittomia. Jos alkeistapauksiksi valitaan seitsemän lottonumeron joukot, niin $\text{P(kaikki parittomia)} = \dfrac{\binom{20}{7}}{\binom{39}{7}}$.

Jos alkeistapauksiksi valitaan seitsemän lottonumeron jonot, niin

$$\text{P(kaikki parittomia)} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 14}{39 \cdot 38 \cdot \ldots \cdot 33}.$$

Todennäköisyys voidaan laskea myös yleisellä kertolaskusäännöllä:

$$\text{P(kaikki parittomia)} = \frac{20}{39} \cdot \frac{19}{38} \cdot \ldots \cdot \frac{14}{33}.)$$

4. 13 % (Olkoon satunnaismuuttuja X niitin halkaisija. Tällöin $\text{P}(X \leqslant 13{,}39) \approx \text{P}(Z \leqslant -0{,}82)$
$= 1 - \Phi(0{,}82) \approx 0{,}2061$ ja $\text{P}(X \geqslant 13{,}62)$
$\approx \text{P}(Z \geqslant 1{,}27) = 1 - \Phi(1{,}27) \approx 0{,}1020$.
Jos niittien määrä on a, niin poistamisen jälkeen niittejä jää $0{,}7939a$, joista $0{,}1020a$ on halkaisijaltaan yli 13,62 mm.)

5. Odotusarvo on 0,25 pelimerkkiä. Kannattaa, sillä yhden kierroksen voiton odotusarvo on positiivinen. (Olkoon satunnaismuuttuja X Karin voitto yhdellä kierroksella. Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat $-2,\ 1,\ 2, \ldots, 13$.

Arvon -2 todennäköisyys on $\frac{3}{4}$ ja jokaisen muun arvon todennäköisyys $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{52}$.)

6. 0,44 (Nauhoitusten alkamiskohdat x ja y ovat väliltä $[0, 60]$ arvottuja satunnaisia lukuja. Tulee olla $0 \leqslant x \leqslant 50$ ja $0 \leqslant y \leqslant 50$ ja lisäksi joko $y \leqslant x - 10$ tai $y \geqslant x + 10$. Nämä ehdot rajaavat neliöstä $0 \leqslant x \leqslant 60,\ 0 \leqslant y \leqslant 60$ alueen (kaksi kolmiota), jonka pinta-ala on 1 600. Siis kysytty todennäköisyys on $\frac{1\,600}{3\,600}$.)

Sarja B

1. 0,38 ($0{,}52 \cdot 0{,}52 + 0{,}31 \cdot 0{,}31 + 0{,}12 \cdot 0{,}12 + 0{,}05 \cdot 0{,}05$)

2. Kuudella nopalla tulee ainakin yksi kuutonen. (Jos satunnaismuuttuja X on kuutosten lukumäärä, kun heitetään kuutta noppaa, ja Y kuutosten lukumäärä, kun heitetään 12 noppaa, niin

$$\text{P}(X \geqslant 1) = 1 - \text{P}(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}67 \text{ ja}$$

$\text{P}(Y \geqslant 2) = 1 - (\text{P}(Y = 0) + \text{P}(Y = 1))$

$$= 1 - \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{12} + \binom{12}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{11}\right) \approx 0{,}62.)$$

3. a) $\frac{13}{49} \approx 0{,}27$ (Alkeistapauksia $(-3, -3)$, $(-3, -2)$ jne. on $7 \cdot 7 = 49$, ja ne kannattaa merkitä koordinaatistoon. Yhtälö toteutuu, kun $2ab = 0$ eli kun $a = 0$ tai $b = 0$.)

b) $\frac{13}{49} \approx 0{,}27$ (Yhtälö toteutuu, kun $b = 0$ tai $b = a$.)

4. 0,43 (Todennäköisyys, että nolla menee oikeana perille, on $0{,}94 \cdot 0{,}94 + 0{,}06 \cdot 0{,}04 = 0{,}886$, ja todennäköisyys, että ykkönen menee oikeana perille, on $0{,}96 \cdot 0{,}96 + 0{,}04 \cdot 0{,}06 = 0{,}924$.
Kysytty todennäköisyys on $0{,}886^5 \cdot 0{,}924^3$.)

5. 0,075 (Valitaan alkeistapauksiksi 70 numeron joukosta valitut seitsemän numeron osajoukot.

Alkeistapausten lukumäärä on $\binom{70}{7}$.

Suotuisia ovat alkeistapaukset, joissa on:
7 numeroa 20 oikean numeron joukosta tai
6 numeroa 20 oikean ja 1 numero 50 väärän joukosta tai
5 numeroa 20 oikean ja 2 numeroa 50 väärän joukosta.
Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on

$\binom{20}{7} + \binom{20}{6} \cdot \binom{50}{1} + \binom{20}{5} \cdot \binom{50}{2}$.)

6. 5,6 (Olkoon satunnaismuuttuja X pelattavien otteluiden lukumäärä. Mahdolliset arvot ovat 4, 5, 6 ja 7. Neljä ottelua tarvitaan, jos jompikumpi joukkue voittaa neljä ensimmäistä ottelua, joten $P(X = 4) = 0{,}65^4 + 0{,}35^4 \approx 0{,}194$.
Viisi ottelua tarvitaan, jos jompikumpi joukkue voittaa neljästä ensimmäisestä ottelusta kolme ottelua ja viidennen ottelun, joten $P(X = 5)$

$= \binom{4}{3} 0{,}65^3 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65 + \binom{4}{3} 0{,}35^3 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35$

$\approx 0{,}289$.
Kuusi ottelua tarvitaan, jos jompikumpi joukkue voittaa viidestä ensimmäisestä ottelusta kolme ja kuudennen ottelun, joten $P(X = 6)$

$= \binom{5}{3} 0{,}65^3 \cdot 0{,}35^2 \cdot 0{,}65 + \binom{5}{3} 0{,}35^3 \cdot 0{,}65^2 \cdot 0{,}35$

$\approx 0{,}282$.
Seitsemän ottelua tarvitaan, jos kuudessa ensimmäisessä ottelussa voitot menevät tasan, joten

$P(X = 7) = \binom{6}{3} 0{,}65^3 \cdot 0{,}35^3 \approx 0{,}235$.)

Sarja C

1. 0,089 (P(ainakin yksi törmää)
$= 1 - P(\text{yksikään ei törmää})$

$= 1 - \left(1 - \frac{0{,}34}{510}\right)^{140}$.)

2. puuttuva frekvenssi on 20, keskihajonta on 1,17 (Puuttuva frekvenssi ratkaistaan yhtälöllä $\frac{19 \cdot 1 + n \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 2 \cdot 5}{46 + n} = 1{,}5$. Keskihajonta voidaan laskea laskimen tilastotoiminnoilla tai määritelmän mukaisesti: keskihajonnan neliö on

$\frac{15 \cdot (-1{,}5)^2 + 19 \cdot (-0{,}5)^2 + 20 \cdot 0{,}5^2 + 10 \cdot 1{,}5^2 + 2 \cdot 3{,}5^2}{66}$.)

3. 0,27 (Pythagoraan lauseella nähdään, että puun etäisyys seinän päistä on 10,6 m ja siis pienempi kuin 12,0 m. Puu osuu taloon, jos se kaatuu sektoriin, jonka keskuskulma α toteuttaa yhtälön $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{8{,}0}{7{,}0}$. Saadaan $\alpha \approx 97{,}6°$, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{97{,}6°}{360°}$.)

4. 0,066 (Olkoon satunnaismuuttuja X mittausvirhe. Tällöin $P(X \leqslant -5{,}0) + P(X \geqslant 5{,}0)$
$\approx P(Z \leqslant -1{,}62) + P(Z \geqslant 2{,}23)$
$= 1 - \Phi(1{,}62) + 1 - \Phi(2{,}23)$.)

5. 0,45 (Tiina joutuu ostamaan yli kymmenen arpaa, jos kymmenellä ensimmäisellä ei tule yhtään voittoa tai tulee yksi voitto. Valitaan alkeistapauksiksi 10 arvan joukot, jolloin

$P(\text{0 voittoa}) = \frac{\binom{25}{10}}{\binom{30}{10}}$ ja $P(\text{1 voitto}) = \frac{\binom{25}{9} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{30}{10}}$.)

6. a) $-1 + \sqrt{2} \approx 0{,}414$
(Olkoon p A:n todennäköisyys yksittäisessä toistossa. Binomitodennäköisyyden kaavalla saadaan yhtälö $10p^3(1-p)^2 = 5p(1-p)^4$ eli $10p^3(1-p)^2 - 5p(1-p)^4 = 0$. Erottamalla yhteiset tekijät 5, p ja $(1-p)^2$ saadaan yhtälö $5p(1-p)^2(2p^2 - (1-p)^2) = 0$ eli $5p(1-p)^2(p^2 + 2p - 1) = 0$. Tulon nollasäännöllä saadaan yhtälön juuret 0, 1, $-1 + \sqrt{2}$ ja $-1 - \sqrt{2}$, joista vain $-1 + \sqrt{2}$ on mahdollinen. Koska $p \neq 0$ ja $1 - p \neq 0$, niin yhtälö $10p^3(1-p)^2 = 5p(1-p)^4$ voidaan myös jakaa nollasta eroavalla lausekkeella $p(1-p)^2$, jolloin saadaan suoraan toisen asteen yhtälö $10p^2 = 5(1-p)^2$.)
b) Välillä $[1, 2]$ olevan luvun neliö on enintään 2, kun luku on välillä $[1, \sqrt{2}]$. Todennäköisyys, että väliltä $[1, 2]$ arvotun yksittäisen luvun neliö on enintään 2 on välin suotuisan osan pituuden $\sqrt{2} - 1$ suhde koko välin pituuteen 1 eli $\sqrt{2} - 1 = -1 + \sqrt{2}$. a-kohdan nojalla väite pätee.

Sarja D

1. 0,22 (Ensimmäisen lapsen syntymäkuukaudelle on 12 vaihtoehtoa, toisen lapsen 12 jne. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia yhdistelmiä on 12^6. Suotuisia yhdistelmiä on $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.)

2. 386 euroa (Olkoon satunnaismuuttuja X virheiden lukumäärä yhdessä tuotteessa.
$P(X = 0) = 0{,}92 \cdot 0{,}93 = 0{,}8556$
$P(X = 1) = 0{,}08 \cdot 0{,}93 + 0{,}92 \cdot 0{,}07 = 0{,}1388$
$P(X = 2) = 0{,}08 \cdot 0{,}07 = 0{,}0056$
Voiton odotusarvo on
$0{,}8556 \cdot 500 + 0{,}1388 \cdot 100 + 0{,}0056 \cdot (-10\,000)$.)

3. 0,59 (Jokaisella on kaksi isoisää. Todennäköisyys, että yksittäisen henkilön jompikumpi isoisä on Veikko, on
$1 - P(\text{ei kumpikaan}) = 1 - 0{,}96^2 = 0{,}0784$.
Todennäköisyys, että vähintään kahdella on Veikko isoisänä, on
$1 - (P(\text{ei kenelläkään}) + P(\text{yhdellä}))$
$= 1 - (0{,}9216^{25} + \binom{25}{1} 0{,}0784 \cdot 0{,}9216^{24})$.)

4. 11 % (Olkoon p todennäköisyys, että satunnaisesti valittu tuote on viallinen. Todennäköisyys, että tuote ei ole viallinen, on $1 - p$, ja todennäköisyys, että 12 tuotteesta ainakin yksi on viallinen, on $1 - (1-p)^{12}$.
Yhtälöstä $1 - (1-p)^{12} = 0{,}75$ saadaan $(1-p)^{12} = 0{,}25$ ja edelleen $1 - p = \sqrt[12]{0{,}25}$ ja $p = 1 - \sqrt[12]{0{,}25} \approx 0{,}11$.)

5. 0,55 (Tapahtuma jakautuu toisensa poissulkeviin tapahtumiin: ”2 valkoista, 1 punainen, 1 musta” tai ”1 valkoinen, 2 punaista, 1 musta” tai ”1 valkoinen, 1 punainen, 2 mustaa”. Valitaan alkeistapauksiksi 12 pallon joukon 4 pallon osajoukot.

$$P(\text{saadaan jokaista väriä}) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{4}}$$

$$+ \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{4}} + \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{12}{4}}.)$$

6. 0,43 (Kaapon heitoille on $P(D \leqslant 8) = P(-8 \leqslant X \leqslant 8) = 0{,}75$. Määritetään normaalisti jakautuneen muuttujan X keskihajonta σ. Koska $P(-8 \leqslant X \leqslant 8)$
$= P(-\frac{8}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{8}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{8}{\sigma}) - 1 = 0{,}75$, niin $\Phi(\frac{8}{\sigma}) = 0{,}875$. Taulukon mukaan $\frac{8}{\sigma} \approx 1{,}15$, joten $\sigma \approx 6{,}96$. Tällöin $P(D \leqslant 4) = P(-4 \leqslant X \leqslant 4)$
$\approx P(-\frac{4}{6{,}96} \leqslant Z \leqslant \frac{4}{6{,}96}) \approx 2\Phi(0{,}57) - 1 \approx 0{,}43$.)

Sarja E

1. 0,74 $(0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}8 \cdot 0{,}7)$

2. 0,34 (Olkoon satunnaismuuttuja X ryhmään tulevien naisten lukumäärä. Kysytty todennäköisyys on $P(X = 6) + P(X = 7)$
$= \binom{15}{6} \cdot 0{,}51^6 \cdot 0{,}49^9 + \binom{15}{7} \cdot 0{,}51^7 \cdot 0{,}49^8$.)

3. 0,77 (Lasketaan ensin vastatapahtuman ”ei yhteisiä jäseniä” eli tapahtuman ”jälkimmäisessä ryhmässä ei ole yhtään ensimmäiseen valittua” todennäköisyys. Vastatapahtuman todennäköisyys voidaan laskea valitsemalla alkeistapauksiksi kuuden hengen osajoukot, jolloin todennäköisyys on $\dfrac{\binom{24}{6}}{\binom{30}{6}}$, tai kuuden hengen jonot, jolloin todennäköisyys on $\dfrac{24 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 19}{30 \cdot 29 \cdot \ldots \cdot 25}$ tai yleisellä kertolaskusäännöllä, jolloin todennäköisyys on $\frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29} \cdot \ldots \cdot \frac{19}{25}$.)

4. 0,23 (Olkoon satunnaismuuttuja X yhden lampun kestoaika. Tällöin
$P(X \geqslant 180 \cdot 5) = P(Z \geqslant -0{,}5) = \Phi(0{,}5) \approx 0{,}6915$.
Kysytty todennäköisyys on $0{,}6915^4$.)

5. 0,27 (Lasketaan ensin vastatapahtuman ”korkeintaan yksi naimisissa” todennäköisyys.
P(korkeintaan yksi naimisissa)
= P(ei yhtään naimisissa)
+ P(1 mies ja 0 naista naimisissa)
+ P(0 miestä ja 1 nainen naimisissa)
$= 0{,}948^8 \cdot 0{,}881^5 + \binom{8}{1} 0{,}052 \cdot 0{,}948^7 \cdot 0{,}881^5$
$+ 0{,}948^8 \cdot \binom{5}{1} \cdot 0{,}119 \cdot 0{,}881^4$)

6. 4,96 (Satunnaismuuttujan X = ”suurin silmäluku” mahdolliset arvot ovat 1, 2, 3, 4, 5 ja 6, ja arvojen todennäköisyydet ovat vastaavasti
$\frac{1}{216}$, $\frac{7}{216}$, $\frac{19}{216}$, $\frac{37}{216}$, $\frac{61}{216}$ ja $\frac{91}{216}$.
Ensimmäinen todennäköisyys on ilmeinen:
$P(X = 1) = \left(\frac{1}{6}\right)^3$.
Muut todennäköisyydet voi laskea käyttäen havaintoa P(jokainen silmäluku $\leqslant k$)
= P(suurin silmäluku = k) + P(jokainen $\leqslant k - 1$).
Siis
$P(X = 2) = P(\text{jokainen} \leqslant 2) - P(\text{jokainen} \leqslant 1)$
$= \left(\frac{2}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3$,
$P(X = 3) = P(\text{jokainen} \leqslant 3) - P(\text{jokainen} \leqslant 2)$
$= \left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{6}\right)^3$ jne.)

Hakemisto

absoluuttinen jakauma 116

alkeistapaus 7

binomijakauma 152

binomikaava 68

binomikerroin 59

binomitodennäköisyys 106

fraktiili 136

frekvenssi 113

frekvenssitaulukko 113

histogrammi 131

jakauma
- diskreetin satunnaismuuttujan jakauma 30
- diskreetin tilastollisen muuttujan jakauma 113
- jatkuvan tilastollisen muuttujan jakauma 131
- jatkuvan satunnaismuuttujan jakauma 142

janakuvio 115

jatkuvuuskorjaus 153

jonojen lukumäärä 52

järjestysten lukumäärä 49

kertolaskusääntö
- yleinen kertolaskusääntö 80
- riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntö 83

kertoma 49

kertymä 136

kertymäfunktio 147

kertymäkuvaaja 135

keskiarvo 116

keskihajonta
- tilastollisen muuttujan keskihajonta . . 120
- diskreetin satunnaismuuttujan keskihajonta 124

kokonaistodennäköisyys 97

kombinaatio 58

kombinatoriikka 70

komplementtitapahtuma 10

luokkakeskus 131

mahdoton tapahtuma 8

mediaani 136

Monte Carlo -menetelmä 29

moodi 116

normaalijakauma 144

normaalijakauma-approksimaatio 153

normitettu normaalijakauma 146

normitettu arvo 146

normittaminen 146

odotusarvo 33

osajoukkojen lukumäärä 58
otoskeskihajonta 121
painotettu keskiarvo 128
Pascalin kolmio 65
permutaatio 49
perusjoukko 7
pistetodennäköisyys 143
poissulkevat tapahtumat 95
pylväskuvio 115
riippumattomat tapahtumat 83
satunnaisilmiö 7
satunnaiskoe 7
satunnaismuuttuja
määritelmä 30
diskreetti satunnaismuuttuja. 30
simuloiminen 18
suhteellinen jakauma 116
suotuinen alkeistapaus 7
symmetriset alkeistapaukset 8
syntymäpäiväparadoksi 55
takaisinpano 41
tapahtuma 7
tiheysfunktio 143
tilastollinen muuttuja
diskreetti tilastollinen muuttuja. 116
jatkuva tilastollinen muuttuja 131
todennäköisyys
klassinen todennäköisyys 8
tilastollinen todennäköisyys 13
geometrinen todennäköisyys. 26
ehdollinen todennäköisyys 80
toistokoe 106
tuloperiaate 40
tyyppiarvo. 116
variaatio 52
varianssi 120
varma tapahtuma. 8
vastatapahtuma 10
yhteenlaskusääntö
yleinen yhteenlaskusääntö. 93
poissulkevien tapahtumien
yhteenlaskusääntö 95

Normaalijakauman kertymäfunktion Φ arvoja

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9417	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9983	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999